МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

К. О. МЕТЕШКІН

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з курсу

«МАТЕМАТИЧНА ОБРОБКА ГЕОДЕЗИЧНИХ ВИМИРІВ»

МОДУЛЬ 1

ЗАСТОСУВАННЯ ОСНОВ ТЕОРІЇ ПОХИБОК У ОБРОБЦІ ГЕОДЕЗИЧНИХ ДАНИХ

Харків
ХНАМГ 2010

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

К. О. МЕТЕШКІН

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з курсу

«МАТЕМАТИЧНА ОБРОБКА ГЕОДЕЗИЧНИХ ВИМИРІВ»

МОДУЛЬ 1

ЗАСТОСУВАННЯ ОСНОВ ТЕОРІЇ ПОХИБОК У ОБРОБЦІ ГЕОДЕЗИЧНИХ ДАНИХ

(для науково-педагогічних працівників, що реалізують технологічний підхід в навчанні і студентів 2-го курсу денної і заочної форм навчання напряму підготовки 6.080101 «Геодезія, картографія та землеустрій». Експериментальна версія для технології навчання)

Харків
ХНАМГ 2010

Метешкін К.О. Конспект лекцій з курсу «Математична обробка геодезичних вимирів» Модуль 1. Застосування основ теорії похибок у обробці геодезичних даних (для науково-педагогічних працівників, що реалізують технологічний підхід в навчанні і студентів 2-го курсу денної і заочної форм навчання напряму підготовки 6.080101 «Геодезія, картографія та землеустрій». Експериментальна версія для технології навчання) / К. О. Метешкін; Харк. нац. акад. міськ. госп-ва; – Х.: ХНАМГ, 2010. - 138 с.

Автор: К. О. Метешкін

Рекомендовано кафедрою геоінформаційних систем та геодезії, протокол засідання № 5від 22.12.2010 р.

ВСТУП

Навчальний матеріал цого посібника стосується однієї з найбільш наукоємних дисциплін, які використовують під час підготовки студентів за напрямом 6.080101 «Геодезія, картографія та землеустрій». Він створювався на основі навчально-методичного посібника «Теория математической обработки геодезических измерений» (російскої мовою), автором якого є Л. К. Войславський. Змістова частина посібника доповнена новим навчальним і ілюстративним матеріалом, а також скоректована його структура і назва.

У зв'язку з останніми досягненнями педагогічної науки і практики, а також тенденціями навчального процесу у внз у вигляді технологій, навчальний матеріал розроблявся так, щоб він був змістовою основою прикладної технології навчання. Тому перший змістовий модуль містить відомості стосовно основних параметрів і структури технології навчання, цільові установки, використану термінологію, логічні зв'язки навчального матеріалу з іншими дисциплінами навчального плану, а також особливості вивчення навчального матеріалу. Така структура початкової частини навчального матеріалу дає можливість: по-перше, для викладача - краще орієнтуватися в навчальному матеріалі і скоротити час для підготовки до занять; по-друге, для студентів очного відділення - структурувати свої знання, побачити їх місце в системі і набутих знань; по-третє, для студентів заочного відділення - з високим ступенем самостійності вивчити запропонований їм навчальний матеріал.

Решта навчального матеріалу розбита на сім змістових модулі, у яких викладені методи, способи застосування теорії похибок в обробці геодезичних даних.

Розроблений навчальний матеріал забезпечується інформаційною підтримкою, тобто посиланнями на додаткові джерела інформації (літературу і адреси в Інтернет), має лінгвістичне забезпечення у вигляді невеликого тезауруса, а також довідкові дані, які розміщені в додатку.

Інноваційний характер викладу навчального матеріалу передбачає експериментальні дослідження з метою оцінювання доцільності переходу від тради-

ційного викладання навчального матеріалу у вигляді методичок і посібників до сучаснішої форми викладання навчальних дисциплін у вигляді опису технологій навчання і моделей професійних знань викладачів. Технологічний підхід до подання навчального матеріалу, на наш погляд, забезпечить ширше застосування інформаційних технологій в освіті.

Автор висловлює глибоку вдячність колективу кафедри, який надавав всіляку підтримку при написанні цього матеріалу. Особливо професорові Шипуліну В. Д., який консультував мене з питань математики і застосування її методів у геодезії. Старшому викладачеві Глушенковій І. С., яка допомагала розібратися з особливостями геодезичних вимірів. Особливу вдячність маю висловити доцентові Патракєєву І. М., завідуючому кафедри, за чуйність і виявлену довіру у вдосконаленні навчальной дисципліни «Матиматична обробка геодезичних вимирів», а також за умови, які він створив для плідної роботи над навчальним матеріалом.

Змістовий модуль 1

Основні відомості про технологію навчання

1.1. Параметри технології навчання і ієрархія її цільових установок

Цей навчальний матеріал адаптований під технологію навчання і є складовою частиною освітньої стандартизованної технології за напрямом 6.080101 «Геодезія, картографія та землеустрій».

Під освітньою стандартизованою технологією розуміють процес, який має чіткі межі залежно від освітнього кваліфікаційного рівня підготовки фахівця, заснований на Державних освітніх стандартах (навчальному плані, структурно-логічній схемі, освітньо-кваліфікаційній характеристиці, освітньо-професійній програмі), які реалізують *стратегію групового педагогічного рішення* і є сукупністю взаємозв'язаних технологій навчання студентів окремим дисциплінам.

Дисципліна входить до блоку професійно-орієнтованих дисциплін.

Відповідно до освітнього стандарту технологія навчання має наступні параметри:

- **об'єкт вивчення**: математичний апарат, що забезпечує обробку геодезичних вимірювань і інтерпретацію геоданих у геоінформаційних системах;
- **предмет вивчення**: математичні методи обробки геодезичних вимірювань;
- **початок реалізації** технології навчання: 2 курс;
- **тривалість реалізації** технології навчання: 3 - 4 семестр;
- **об'єм** теоретичного матеріалу: 33 години;
- **об'єм** лабораторної практики 66 годин;
- **діагностика** знань і умінь: атестація (3, 4 семестр), іспит (3 семестр), залік (4 семестр);
- **правове забезпечення**: державний стандарт вищої освіти вищого навчального закладу за напрямом 7.070908 ”Геоінформаційні системи і технології”;
- **технічне забезпечення**: засоби інформатики і оргтехніка;
- **програмне забезпечення**: Microsoft PowerPoint, тестові програми і інше.

- **інформаційно – технологічне забезпечення**: підручники, навчальний посібник, Інтернет, інструкції і інше;

- **лінгвістичне забезпечення**: комбіноване (у письмовій і усній формах) із використанням природної мови, мови математики і мови інтерфейсів PowerPoint, Excel, Windows та інше;

- **математичне забезпечення**: методи теорії вірогідності, математичної статистики, метрології, теорії вимірювань, теорії помилок, методи лінійної алгебри і інше;

- **технологію навчання спроектував**: доктор технічних наук, доцент К. О. Метешкін.

У основу реалізації стратегії технології навчання покладена ієрархічна система навчальних цільових установок, результатом досягнення яких є знання і уміння студентів. Ієрархія цільових установок технології навчання і результати їх досягнення структуровані і зведені в табл.1.1.

Таблиця 1.1. Ієрархія цільових установок технології навчання і результати їх досягнення

Навчальні цілі	**Результати досягнення навчальних цілей (знання і уміння)**
1	2
Технології навчання: сформувати у студентів випускного курсу структуровані знання, необхідні для вирішення типових завдань на первинних посадах, передбачених освітньо - кваліфікаційною характеристикою.	**Знання** сукупності математичних методів обробки і інтерпретації геоданих. **Уміння** застосовувати ті або інші методи обробки і інтерпретації геодезичних вимірювань.
Модуль 1. Вивчити основні методи теорії похибок вимірювань <u>Змістовий модуль 1.</u> Сформувати у студентів узагальнене уявлення про навчальний матеріал і методи його викладання. <u>Змістовий модуль 2.</u> Доповнювати лексичну базу студентів новими термінами і сутнісними визначеннями метрології.	**Евристичні знання**, що дозволяють студентам орієнтуватися в тій предметній галузь, що вивчається, і самостійно вивчати додатковий матеріал. **Знання** про структуру навчального матеріалу, послідовності його вивчення і загальних характеристиках технології його вивчення. **Знання** основних термінів теорії вимірювань і їх визначення.

Продовження табл. 1.1

1	2
Змістовий модуль 3. Сформувати у студентів уявлення про правила оцінювання точності вимірювань у геодезії	**Знання** правил оцінювання точності вимірювань у геодезії і **уміння** застосовувати їх на практиці
Змістовий модуль 4. Сформувати у студентів уявлення про оцінювання точності функцій безпосередньо виміряних величин. Змістовий модуль 5. Сформувати у студентів знання про процедури математичної обробки рівноточних вимірів однієї і тієї ж величини. Змістовий модуль 6. Сформувати у студентів уявлення про нерівноточні виміри. Змістовий модуль 7. Сформувати у студентів уявлення про подвійні виміри. Змістовий модуль 8. Сформувати у студентів загальне уявлення про залежні випадкові величини і залежні похибки.	**Знання** про процедури оцінювання точності функцій безпосередньо виміряних величин. **Знання** про процедури математичної обробки рівноточних вимірів однієї і тієї ж величини і **уміння** їх застосовувати на практиці. **Знання** суті процедур рівноточного вимірювання і **уміння** їх застосовувати на практиці. **Знання** суті процедур подвійного вимірювання і **уміння** їх застосовувати на практиці. **Знання** суті вимірювання залежних випадкових величин і залежних похибок.
Модуль 2. Вивчити один з методів теорії помилок для оцінки невідомих величин за наслідками геодезичних вимірювань які містять випадкові помилки. Змістовий модуль 1. Вивчити основні відомості про метод найменших квадратів. Змістовий модуль 2. Вивчити параметричний спосіб врівноважування випадкових величин. Змістовий модуль 3. Вивчити методи зрівнювання вимірюваних величин, пов'язаних умовами.	**Знання** інструментальних можливостей методу найменших квадратів при обробці геодезичних вимірювань і **уміння** його застосування на практиці. **Знання** основних можливостях методу найменших квадратів при обробці геодезичних вимірювань. **Знання** параметричного способу зрівнювання випадкових величин і **уміння** його застосування на практиці. **Знання** можливостей методу зрівнювання вимірюваних величин, пов'язаних умовами.

1.2. Зміст навчального модуля

Модуль 1

ЗМ. 1. Основні відомості про технологію навчання

1.1. Параметри технології навчання і ієрархія її цільових установок.

1.2. Зміст навчальних модулів.

1.3. Термінологічна модель змісту навчального матеріалу.

1.4. Схема технології навчання як складова частина структурно - логічної схеми підготовки фахівця.

1.5. Особливості вивчення навчального матеріалу.

ЗМ. 2. Загальні відомості про метрологію

2.1. Історичні відомості про геодезію і метрологію

2.2. Загальна характеристика математичних методів обробки геодезичних вимірювань.

2.3. Поняття фізичної величини.

2.4. Вимірювання і їх класифікація.

2.5. Похибки вимірювань і їх класифікація і властивості.

2.6. Властивості випадкових похибок.

ЗМ.3. Кількісні критерії оцінювання точності вимірювань

3.1. Моделі розподілу випадкових похибок вимірювань.

3.2. Моделі розподілу систематичних похибок вимірювань.

3.3. Кількісні критерії оцінювання точності ряду рівноточних вимірювань однієї величини.

ЗМ. 4. Оцінка точності функцій безпосередньо вимірюваних величин

4.1. Основна теорема теорії похибок і її застосування для розрахунку гранично припустимого непогодження.

4.2. Апостеріорна оцінка точності функцій вимірюваних величин.

ЗМ. 5. Математична обробка ряду рівноточних результатів вимірювань однієї і тієї ж величини

5.1. Просте арифметичне серединє і його властивості.

5.2. Формула емпіричної середньоквадратичної похибки.

5.3. Послідовність математичної обробки ряду рівноточних вимірів однієї і тієї ж величини.

ЗМ. 6. Метод нерівноточних вимірів

6.1. Вага як спеціальна міра відносної точності результатів вимірів.

6.2. Вага функцій результатів вимірів.

6.3. Приклади розрахунку ваги в геодезичній практиці.

6.4. Загальна арифметичне серединє і його властивості.

6.5. Формула емпіричної середньоквадратичної похибки одиниці ваги.

6.6. Послідовність математичної обробки ряду нерівноточних вимірів однієї і тієї ж величини.

ЗМ. 7. Метод подвійних вимірів

7.1. Загальні міркування про метод подвійних вимірів.

7.2. Оцінювання точності за різницями подвійних рівноточних вимірів.

7.3. Оцінювання точності за різницями подвійних нерівноточних вимірів.

ЗМ. 8. Короткі відомості про залежні випадкові величини і залежні попохибки

8.1. Види залежностей.

8.2. Кількісні характеристики лінійної стохастичної залежності.

8.3. Залежні випадкові похибки в геодезії.

Модуль 2

ЗМ. 1. Вирівнювання результатів геодезичних вимірів методами математичної статистики

2.1. Сутність задачі вирівнювання результатів вимірів в геодезії

2.2. Два підходи до розв’язання задачі вирівнювання.

2.3. Принцип найменших квадратів і його обгрунтування.

ЗМ.2. Параметричний метод вирівнювання

2.1. Постановка задачі. Рівняння поправок.

2.2. Мінімум $[V^2]$. Нормальні рівняння.

2.3. Рівняння поправок і нормальні рівняння в матричному записі. Розв’язання нормальних рівнянь.

2.4. Оцінка точності вирівняних значень невідомих.

2.5. Обчислення емпіричної середньоквадратичної погрішності за поправками, отриманими із вирівнювання.

2.6. Середньоквадратична похибка виміряних величин після вирівнювання.

2.7. Вирівнювання і оцінка точності при нерівноточних вимірах.

2.8. Вирівнювання тріангуляції.

2.9. Вирівнювання трилатерації (лінійна засічка).

2.10. Вирівнювання системи нівелірних ходів.

ЗМ. 3. Метод вирівнювання зміряних величин, зв'язаних умовами

3.1. Постановка задачі. Умовні рівняння.

3.2. Умовний мінімум $[V^2]$. Нормальні рівняння корелят і їх розв'язання.

3.3. Оцінювання точності функцій вирівняних величин.

3.4. Обчислення емпіричної середньоквадратичної похибки за поправками і середньоквадратичною похибкою вирівняних величин.

3.5. Виррівнювання і оцінка точності нерівноточних вимірів.

3.6. Вирівнювання тріангуляції.

3.7. Вирівнювання систем нівелірних ходів.

ЗМ. 4. Вирівнювання систем виміряних величин, пов'язаних умовами, із додатковими невідомими

4.1. Загальні відомості.

4.2. Підведення підсумків курсу.

1.1. Мережева модель технології навчання

Мережева модель технології навчання дає уявлення про вивчення навчального матеріалу розподіленого в часі. Надано процес досягнення поставлених цілей у вигляді мережевої (семантичною) моделі, де її вершини відповідатимуть процедурам проведення занять як теоретичних, так і дослідницьких у вигляді лабораторних робіт (див. рис.1.1). Мережева модель ставить у відповідність змістові модулі і об'єм конкретних видів занять. Мережева модель містить декілька видів стосунків «Л – Лр», «Лр –Л», «Лр – Лр», «Лр – Э», «Лр – З». Крім того, два види вершин мережевої моделі жорстко впорядковані. Строгий порядок мають вершини $Лі_{i=\overline{1,16}}$ а $Лрj$ $j=\overline{1,36}$. Такий порядок забезпечує послідовне вивчення теоретичного матеріалу і його закріплення у процесі виконання лабораторних робіт. Окремі вершини помічені спеціальним чином, що позначає заняття на яких здійснюються процедури діагностики знань і умінь студентів за пройденим матеріалом, а також заняття на яких видаються розрахунково-графічні завдання.

МЕРЕЖЕВА МОДЕЛЬ ТЕХНОЛОГІЇ НАВЧАННЯ (МОДУЛЬ 1)

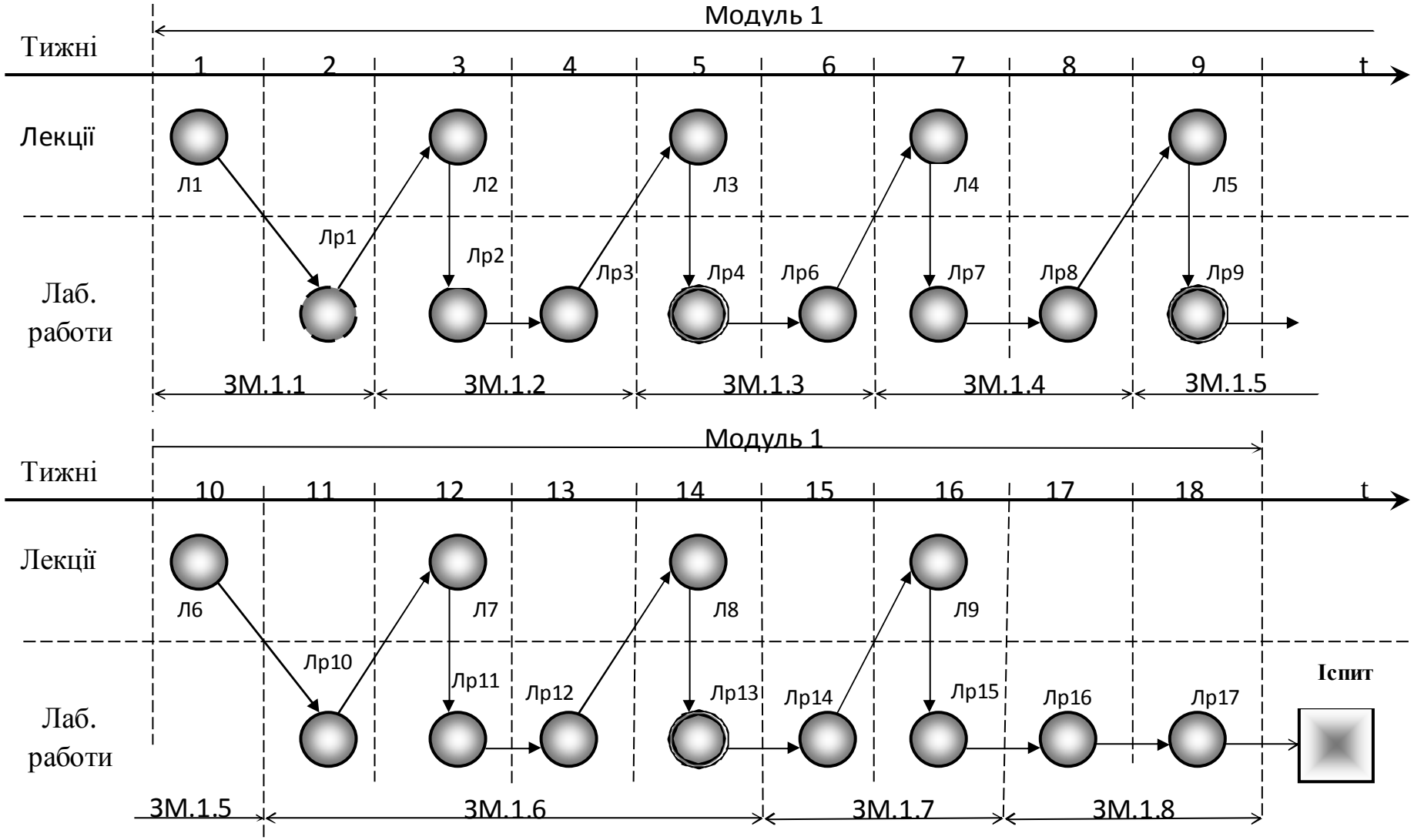


Рис. 1.1 - Мережева модель викладання навчального матеріалу

МЕРЕЖЕВА МОДЕЛЬ ТЕХНОЛОГІЇ НАВЧАННЯ (МОДУЛЬ 2)

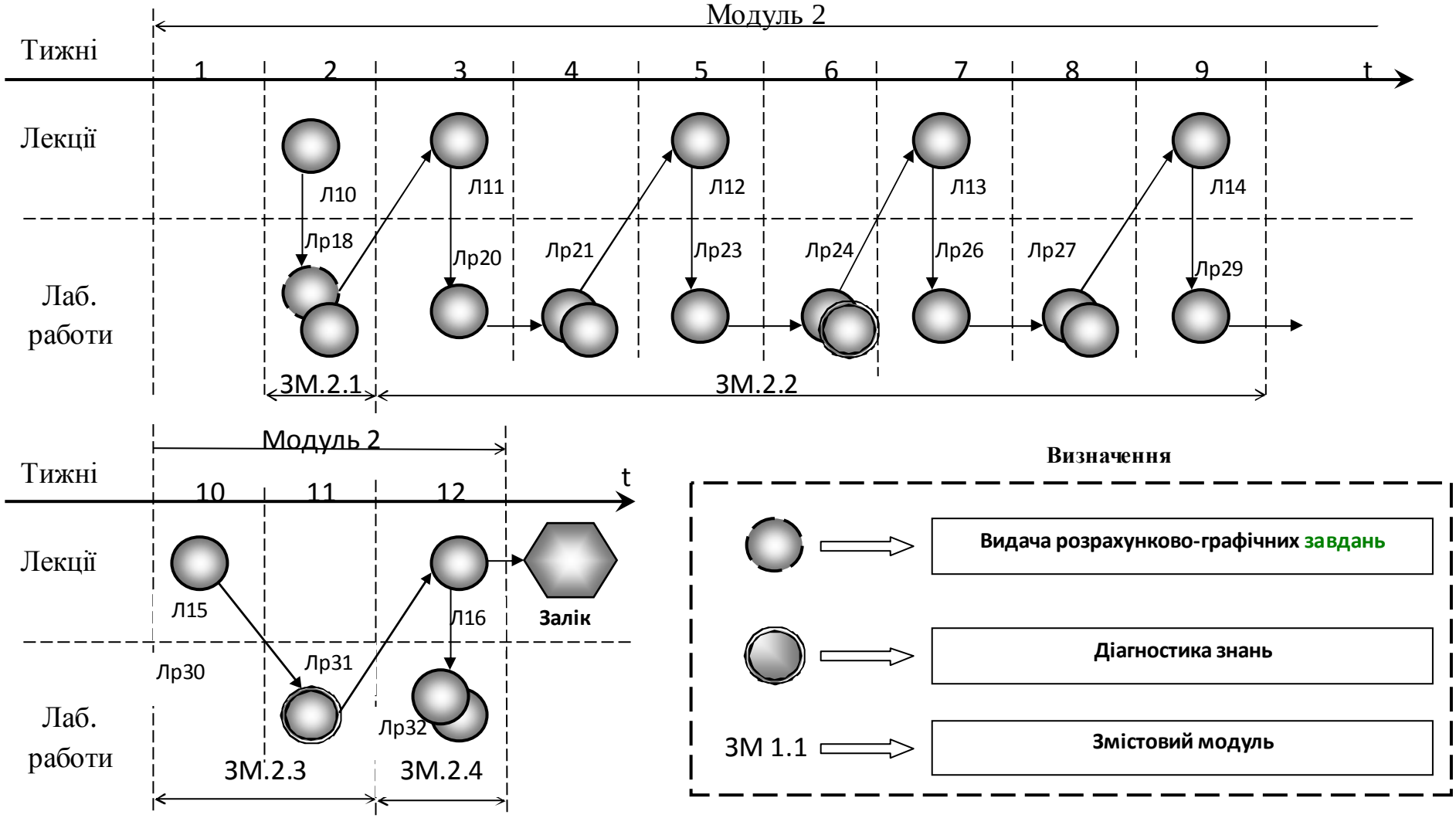


Рис. 1.1 - Мережева модель викладання навчального матеріалу (продовження)

1.4. Термінологічна модель змісту навчального матеріалу

Предметом вивчення навчальної дисципліни є методи обробки геодезичних вимірювань. Тому як корінне поняття термінологічної моделі навчальної дисципліни оберемо термін «метрологія». На рис.1.2 ілюструється узагальнена схема формування понять науки про виміри - метрології. Тут в якісті термінів, що забезпечують розуміння навчального матеріалу використовують терміни і визначення вимірів у геодезії і інструментальних математичних засобах (методи, способи, теорії).

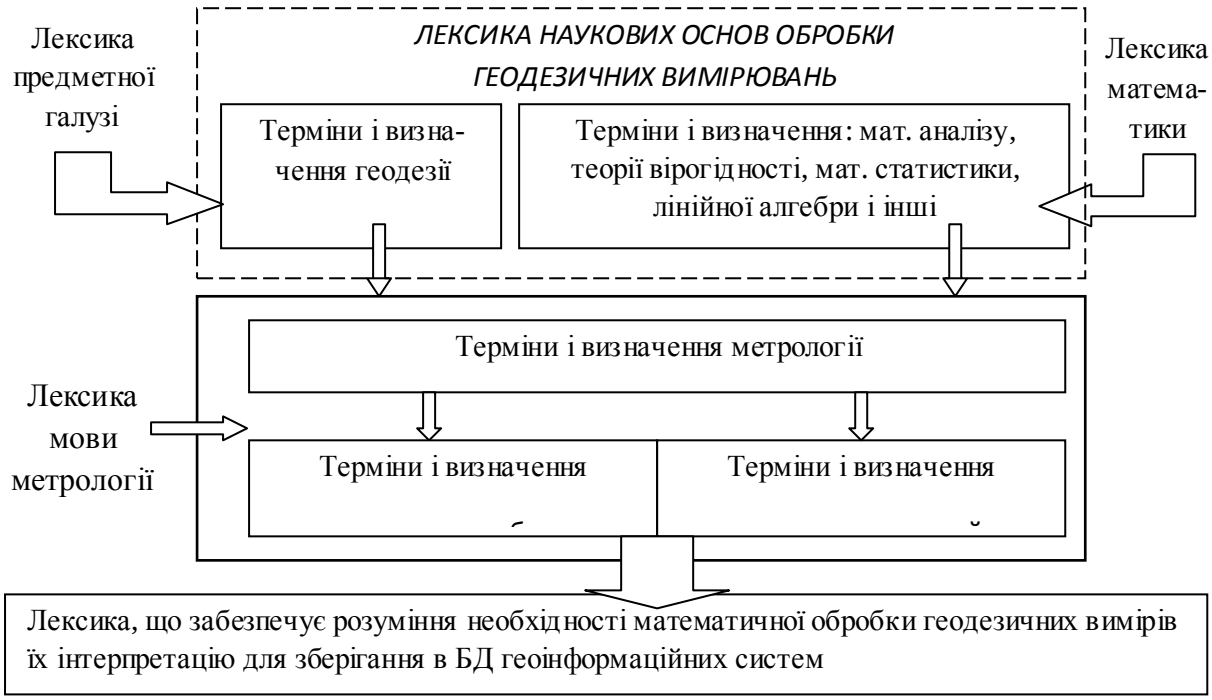


Рис. 1.2 - Узагальнена схема формування понять метрології

У процесі вивчення навчального матеріалу студенти повинні сформувати термінологічну і понятійну базу певного навчального матеріалу, яку надалі використають при вивченні картографії, геоінформаційних систем, вищій геодезії і таке інше. У верхній частині рис. 1.2 показано, що розпочинаючи вивчення цього навчального матеріалу студенти повинні вже володіти термінологією курсу «геодезія», а також термінами і основними поняттями математичного інструментарію. Термінологія цього навчального матеріалу представлена в додатку **А** у вигляді тезауруса.

1.5. Схема технології навчання як складова частина структурно – логічної схеми підготовки фахівця

Освітні стандарти вищого навчального закладу за напрямом за напрямом 6.080101– «Геодезія, картографія та землеустрій», зокрема навчальний план, припускає реалізацію технології навчання «Математична обробка геодезичних вимирів» на другому курсі (3 і 4 семестри). Технологія навчання, яку розробили, спирається на знання студентів, які вони повинні отримати на першому курсі під час вивчення «Вищої математики», «Геодезії», «Фізики», «Інформатики і програмування», а також інших дисциплін (див. рис. 1.3).

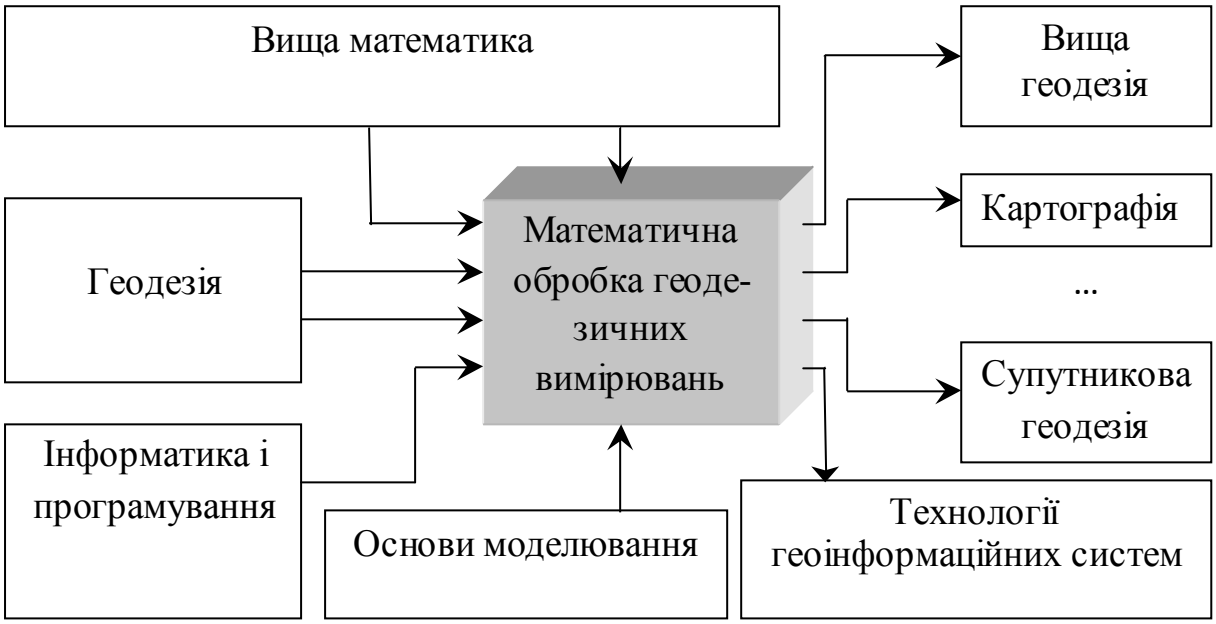


Рис. 1.3 - Фрагмент структурно- логичної схеми, що демонструє зв'язки технології навчання з іншими дисциплінами навчального плану

Паралельно на другому курсі продовжується математична підготовка студентів з дисциплін «Вища математика» і «Основи моделювання». Ці навчальни дисципліни дозволяють успішно реалізувати технологію навчання: «Основи математичного опрацювання геодезичних вимірювань». Така логіка побудови процесу формування професійних знань студентів на першому і другому курсах забезпечує успішне вивчення спеціальних дисциплін, таких як: «Вища геоде-

зія», «Картографія», «Супутникова геодезія», «Основи геоінформаційних систем», «Технології геоінформаційних систем» і інші.

Логіка формування професійних знань студентів ілюструється рис.1.3, де показаний фрагмент структурно-логичної схеми підготовки фахівця з урахуванням вивчення навчального матеріалу з математичного опрацювання геодезичних вимірювань.

Таким чином, фрагментарно показане місце навчальної дисципліни, яке вона займає при підготовці студентів за фахом.

1.6. Особливості вивчення навчального матеріалу

Досвід викладання навчального матеріалу, наведенного у цієї книзі, показує, що він викликає при його вивченні певні труднощі. Крім того, певні труднощі виникали і у автора, який спробував на основі відомої літератури і освітніх стандартів систематизувати навчальний матеріал і підати його у вигляді змістової основи технології навчання.

Однією з основних особливостей цього матеріалу є те, що він максимально наближений до розв'язання практичних завдань геодезії і в ньому відсутні математичні методи і моделі, які рідко використовують або взагалі не використовують у геодезії. Окрім того, **мова**, якою викладено навчальний матеріал, містить лексику, що є сукупністю термінів декількох предметних галузей і наук, – геодезії, метрології, математичного аналізу, теорії похибок, теорії йімовірностей і математичної статистики. Сумісне використання методичних баз цих наук і теорій зумовлює складність морфологічних і синтаксичних правил граматики професійної мови, на якій викладений навчальний матеріал. Таку мову можна назвати природно-математичною, оскільки, з одного боку, нею викладені основні визначення і коментарі до них, задані умови розв'язання прикладів і таке інше. З іншого боку, на основі математичних символів (алфавіту математичної мови) і правил побудови формул і складніших математичних конструкцій (морфології і синтаксису математичної мови) абстрактно і формально показані

співвідношення між виміреними фізичними величинами, які призводять до їх кількісного оцінювання.

Ускладнює мову викладу навчального матеріалу одночасне використання сучасної символіки математичної мови, із символікою запровадженою ще К. Ф. Гауссом, яка за традицією, використовується при описі методів обробки вимірів. Наприклад, одночасно при складанні математичних формул використовують символ суми «[ ]», що запроваджений К.Ф. Гаусом і сучасний символ у вигляді заголовної грецької букви $\sum$.

Ще одна особливість, яку необхідно враховувати при вивченні цого навчального матеріалу, - це подібність понять «Приріст змінної» і «похибке вимірювання». Перше поняття лежить в основі диференціального числення, друге складає основу теорії погрішностей. Смисловим змістом цих понять є різниця. У диференціальному численні це різниця між фіксованою точкою x_0 і довільною точкою x, яка лежить в деяких межах фіксованої точки. У теорії похибок це різниця між дійсним і виміряним значеннями вимірюваної величини Δ. Тому диференціальне числення як математичний інструментарій при обробці геодезичних вимірювань відіграє важливу роль.

Змістовий модуль 2

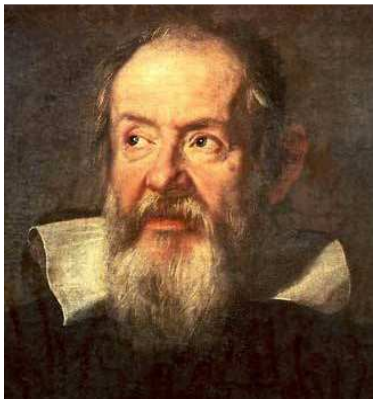
Основні відомості з метрології

2.1. Витоки математичного оцінювання геодезичних вимірювань у особах і персоналіях

Джерела розв’язання завдань, пов'язаних з вимірюваннями земельних ділянок, складанням планів житла, орієнтацію людини в простірі-часі йдуть в глибину століть. Людству знадобилися тисячоліття для того, щоб навчиться вимірювати великі відстані з урахуванням пересіченої місцевості, а також на основі вимірювань добре орієнтуватися в простірі-часі.

Основою геодезичної науки за правом вважають астрономію і математику, зокрема геометрію. Вони дозволили людині перейти від якісних спостережень до кількісного оцінювання, а потім і до математичного опрацювання відповідних вимірювань.

Справедливо можна вважати Галілео Галілея (див. рис. 2.1) за першого природодослідника, який на основі точних математичних (кількісних) розрахунків зробив безліч відкриттів у природознавстві.



ГАЛІЛЕЙ (Galilei) Галілео (1564—1642) — італійський мислитель епохи Відродження, основоположник класичної механіки, астроном, математик, фізик, один із засновників сучасного експериментально-теоретичного природознавства, засновник нової механістичної натурфілософії. Першим здійснив парадигмальное розмежування природознавства і філософії. (За Гете, Р. "помер в той рік, коли народився Ньютон. Це — свято Різдва нашого нового часу"). Професор Пізанського університету (з 1589), після вимушеного від'їзду з Пізи працював на кафедрі математики Падуанського університету (1592—1610 р.р.).

Рис. 2.1 - Видатний мислитель епохи Відродження

Наприклад, використовуючи експериментальний метод, виявив лібрацію Луни (невеликі періодичні погойдування Луни відносно її центру). Чисельні експериментальні дослідження, які проводив Г. Галілей, супроводжувалися

вимірюваннями різних фізичних величин. Саме Г. Галілею належить фраза: «Той, хто хоче розв’язувати питання природних наук без допомоги математики, ставить нерозв'язуване завдання. Слід вимірювати те, що вимірюється, і робити вимірюваним те, що таким не є».

Величезна заслуга Г. Галілея полягає в тому, що він запропонував експериментально-теоретичний метод досліджень, який ще й досі використовує сучасна наука. Винайдені ним прилади: телескоп, мікроскоп, гідростатичні ваги для визначення питомої ваги твердих тіл, пропорційний циркуль, який використовують у креслярській справі, та інше дозволяли проводити дослідження методом вимірювання перебігу різних процесів і явищ. Це дає підставу вважати, що саме Г. Галілей стояв біля витоків створення метрології, теорії вимірювань і теорії похибок.

Сучасниками Г. Галілея були видатні математики Рене Декарт (1596 – 1650 р.р.) і Пьер Ферма (1601 – 1665 р.р.). Видатна заслуга Р. Декарта (див. рис. 2.2) полягає в описі методу, який передбачає досягнення достовірного знання. Він описаний в роботі «Міркування про метод, щоб вірно спрямовувати свій розум і відшукувати істину в науках».

РЕНЕ ДЕКАРТ (фр. Rene Descartes; лат. Renatus Cartesius — Картезій; 31 березня 1596, Лає (провінція Турень), нині Декарт (департамент Ендр і Луара) — 11 лютого 1650, Стокгольм) — французький математик, філософ, фізик і фізіолог, творець аналітичної геометрії і сучасної символіки алгебри, автор методу радикального сумніву у філософії, механіцизму у фізиці, передвісник рефлексології.

Афоризм

Усі науки настільки пов'язані між собою, що легше вивчати всі відразу, ніж будь-яку одну окремо від усіх інших.

Рис. 2.2 - Видатний математик епохи Відроджень

Тут він виділяє чотири положення, які характеризують метод досягнення достовірного знання:

1) починати з безперечного і самоочевидного, тобто з того, протилежне якому не можна уявити;

2) розділяти будь-яку проблему на стільки частин, скільки необхідно для її ефективного розв'язання;

3) починати з простого і поступово просуватися до складного;

4) постійно перевіряти ще раз правильність висновків.

Звернемо увагу читача, що сформульовані Р. Декартом положення методу досягнення достовірного знань співзвучні з дидактичними принципами засновника сучасної педагогіки чеського педагога і письменника Я.А. Коменського (1592 - 1670 р.р.), які викладені ним у книзі «Велика дидактика». У цій книзі виділені: принцип наочності навчання, свідомість у навчанні, систематичності навчання, послідовності навчання і грунтовності вивчення навчального матеріалу.

Цей факт свідчить про те, що навчання і придбання достовірних знань близькі поняття. Тому в процесі викладання і структуризації цього навчального матеріалу враховуватимемо як метод Р. Декарта, так і принципи дидактики Я.А. Коменського.

Повертаючись до оцінок внеску Р. Декарта в науку, і в математику зокрема, слід навести його думку про те, що є математика. Р. Декарт писав: «До галузі математики відносяться тільки ті науки, у яких розглядається або **порядок**, або **міра** і абсолютно не суттєво чи будуть це числа, фігури, зірки, звуки або будь-що інше, у чому відшукають цю міру. Таким чином, повинна існувати якась загальна наука, яка пояснює, що все стосується порядку і міри, не заглиблюючись у дослідження окремих предметів, і ця наука повинна називатися не іноземним, а старим, таким, що вже увійшло в обіг ім'ям Загальної математики». Звідси випливає, що основу методології геодезії як науки складає вища математика.

Для розвитку геодезії Р. Декарт отримав найважливіші результати. Він розробив основи аналітичної геометрії, суть якої полягає у використанні алгебраїчних методів у геометрії і навпаки. Прикладом можуть служити перетворення показані на рис. 2.3, де наведений аналітичний запис (формула) і її геометрична інтерпретація.

Р. Декарт показав, що усяка крива може бути виражена рівнянням двох змінних, і навпаки – усяке рівняння із двома змінними може бути виражено кривою. Це відкриття мало величезне значення не лише для математики, але і для інших наук, зокрема геодезії, що оперує точними величинами – числом, мірою і вагою.

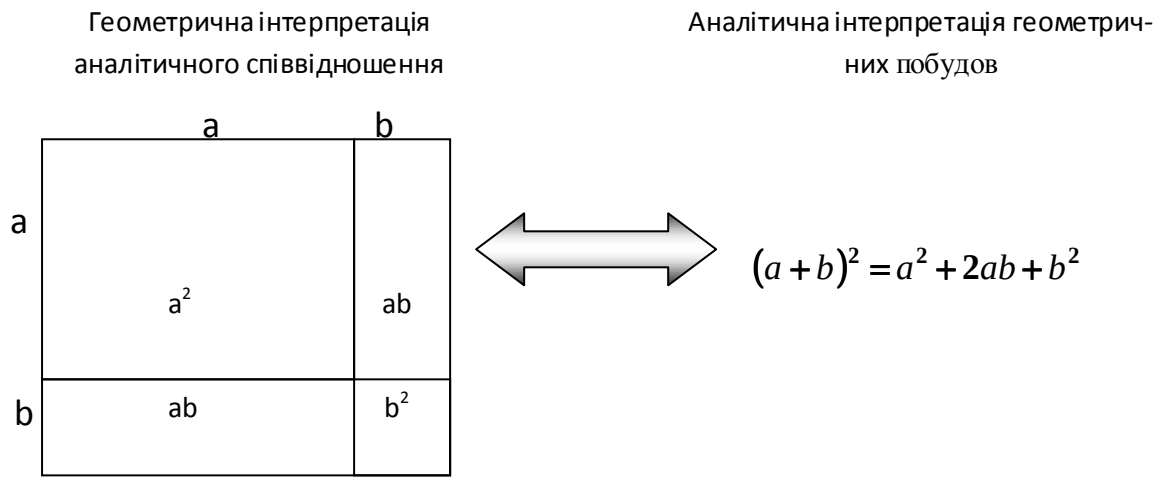
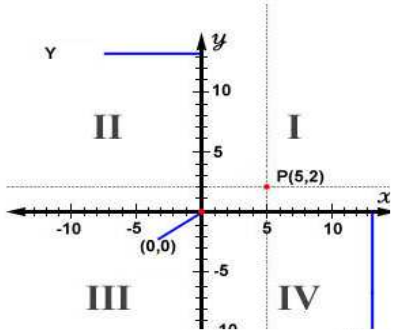
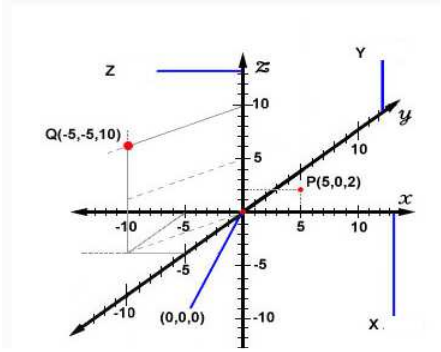


Рис. 2.3 - Геометричні побудови і їх інтерпретація на мові символів

Важливим поняттям в геодезії є «система координат». Р. Декарт запропонував двомірну (прямокутну) і трьохмірну системи координат з позначенням точок у цих системах. Їх ілюструє на рис. 2.4.



Точка P має координати (5,2)



Точка P має координати (5,0,2)
а точка Q — координати (-5,-5,10)

Рис. 2.4 - Декартові системи координат

Крім того, розглядаючи результати, які отримані Р.Декартом з погляду мовознавства (лінгвістики), можна стверджувати, що він запропонував математичну мову, вводячи відповідні позначення змінних, констант (коефіцієнтів), відношень, тобто лексику, а також синтаксис – правила запису математичних співвідношень, які збереглися і використовуються сучасними математиками. Як приклад наведемо формальний запис одного виразу французьким математиком Франсуа Вієтом (1540 – 1603 г.г.) і запис на математичній мові запропонованій Р.Декартом

$$\frac{D\ in\ [B\ cubum\ \ 2 - D\ cubo\ ]}{B\ cubo\ + D\ cubo} \Leftrightarrow \frac{D\left(2B^3 - D^3\right)}{B^3 + D^3}.$$

Видно, що права частина співвідношення має сучасний вигляд.

Підсумовуючи сказане, очевидно, правильно говоритиме не про внесок Р.Декарта в геодезію, а про створення ним математичного інструментарію, який дозволяє описувати геодезичні об'єкти, визначати їх координати з високою мірою точності і достовірності.

Дослідження результатів і досягнень в епоху Відродження в галузі природничих наук (фізиці, механіці, астрономії і ін.) показують, що вони отримані завдяки розвитку математики. Вартий уваги той факт, що більшість видатних

учених епохи Відродження були не лише фізиками, механіками, філософами, астрономами, але і математиками.

Християн Гюйгенс (1629 – 1695 г.г.) був не лише чудовим фізиком, механіком і астрономом, але і видатним математиком (див. рис. 2.5).

Він винайшов маятниковий годинник, удосконалив телескоп Г. Галілея. Його праці з теоретичної механіки мали величезний вплив на молодого Ньютона. У 1657 році Х.Гюйгенс написав додаток «Про розрахунки в азартній грі» до книги його вчителя Ван Схоутена «Математичні етюди». Багато дослідників історії математики вважають, що разом з Пьером Ферма і Блезом Паскалем, Християн Гюйгенс заклав основи теорії ймовірності, яку розвинув Якоб Бернуллі.

Хрістіан Гюйгенс фон Цюйліхен (нидерл. Christiaan Huygens, 14 квітня 1629, Гаага — 8 липня 1695, там же) — голландський математик, фізик, астроном і винахідник.
Перші роботи Гюйгенса присвячені класичним проблемам: теоремам стосовно квадратури гіперболи, еліпса і круга, величині круга. Використовуючи підхід алгебри, він уточнив значення числа π. У 1657 написав трактат Про розрахунки при азартних іграх (De ratiociniis in ludo aleae) — одну з перших робіт по теорії вірогідності. Гюйгенс здобув популярність завдяки винаходу маятникового годинника. Про це відкриття він повідомив у творі «Годинник» (Horologium, 1658).

Рис. 2.5 - Один з основоположників теорії вірогідності

Блез Паськаль (фр. Blaise Pascal, 19 червня 1623—19 серпня 1662) — французький математик, фізик, літератор і філософ. Класик французької літератури, один із засновників математичного аналізу, теорії ймовірності і проектної геометрії, творець перших зразків рахункової техніки, автор основного закону гідростатики.

Ісаак Ньютон (англ. Sir Isaac Newton, 25 грудня 1642 — 20 березня 1727 за юліанським календарем, що використався в Англії у той час; або 4 січня 1643 — 31 березня 1727 за григоріанським календарем) — великий англійський фізик, математик і астроном. Автор фундаментальної праці «Математичні ос-

нови натуральної філософії», у якому він описав закон усесвітнього тяжіння і так звані Закони Ньютона, що заклали основи класичної механіки. Розробив диференціальне і інтегральне числення, теорію кольоровості і багато інших математичних і фізичних теорій.

Не можна не відзначити внесок в науку, включаючи і прикладну, «короля математиків» Карла Фрідріха Гаусса, так його назвали радянські учені А.Н. Колмагоров і А.П. Юшкевіч у роботі «Математика XIX століття» [8]. Це один з небагатьох математиків, який безпосередньо займався геодезією (див. рис. 2.6).

У період з 1820 по 1830 роки займається геодезичною зйомкою королівства Ганновера і складанням його детальної карти. Він не лише здійнює величезну організаційну роботу і керує вимірюванням довжини дуги меридіана від Геттінгена до Альтони, але і створює основи «вищої геодезії», дійсної форми земної поверхні, що займається описом. За результатами практичних геодезичних робіт і теоретичних досліджень у цій галузі К. Гаусс пише роботу «Дослідження предметів вищої геодезії».

Гаусс Карл Фрідріх (30.4.1777, Брауншвейг, — 23.2.1855, Геттінген), німецький математик, що вніс фундаментальний внесок також в астрономію і геодезію. Народився в сім'ї водопровідника. З 1795 по 1798 вчився в Геттингенському університеті. У 1799 отримав доцентуру в Брауншвейзі, у 1807 кафедру математики і астрономії в Геттингенському університеті, з якою була також пов'язана посада директора Геттингенської астрономічної обсерваторії. Відмітними рисами творчості Гаусса є глибокий органічний зв'язок у його дослідженнях між теоретичною і прикладною математикою, надзвичайна широта проблематики. Роботи Гаусса мали великий вплив на розвиток вищої алгебри, теорії чисел, диференціальної геометрії, теорії електрики і магнетизму, геодезії, цілих галузей теоретичної астрономії.

Рис.2.6 - «Король математиків»

Вивчення форми земної поверхні вимагало від нього поглибленого вивчення загального геометричного методу для дослідження поверхонь. Висунуті К.Гауссом у цій галузі ідеї сформульовані в творі «Загальні дослідження кривих

поверхонь» (1827). Основна думка цього твору полягає в тому, що при вивченні поверхні як нескінченно тонкої гнучкої плівки основне значення має не рівняння поверхні в декартових координатах, а диференціальна квадратична форма, через яку виражається квадрат елементу довжини, і інваріантами якої є всі власні властивості поверхні, — передусім її кривизна в кожній точці. Іншими словами, К. Гаусс запропонував розглядати ті властивості поверхні (так звані - внутрішні), які не залежать від згинів поверхні, що не змінюють довжин ліній на ній. Створена таким чином внутрішня геометрія поверхонь послужила зразком для створення n-ні ріманової геометрії.

Величезне значення не лише для геодезії, але і для всіх наук, в основі яких лежить обробка спостережень, мають розроблені К.Гауссом методи набуття найбільш вірогідних значень вимірюваних величин. Особливо широку популярність здобув створений К.Гауссом в 1821-23 р.р. метод найменших квадратів. К.Гауссом закладені також і основи теорії помилок.

Таким чином, розгляд ролі математики у формуванні природничонаукових знань в епоху Відродження можна стверджувати, що отримані в цей період наукові результати в галузі математики лежать в основі сучасних методів обробки геодезичних вимірювань і представлення їх в базах даних автоматизованих картографічних і геоінформаційних системах.

2.2. Фізичні величини

Під фізичною величиною розуміють властивість, притаманну в якісному відношенні багатьом фізичним об'єктам, але в кількісному відношенні індивідуальну для кожного об'єкту. У геодезії під фізичною величиною, що підлягає вимірюванню в процесі геодезичних робіт, розуміють, наприклад: горизонтальні напрями і кути, відстані, площі, приріст координат і таке інше.

Конкретний кількісний вміст у певному об'єкті властивості, відповідний поняттю «Фізична величина», називають **розміром фізичної величини**. Оцінка розміру фізичної величини у вигляді певного числа прийнятих для неї одиниць

називається **значенням фізичної величини.** Наприклад, значення перевищення між крапками А і В рівно - 12.63 м.

Значення фізичної величини, яке ідеальним чином відбивало б відповідну властивість об'єкту, називається **дійсним значенням фізичної величини**. Так, дійсне значення суми кутів плоского трикутника дорівнює 180 градусів. Візначимо, що в більшості випадків практики дійсне значення величини залишається невідомим. Значення фізичної величини, отримане експериментальним шляхом і яке настільки наближається до дійсного значення, що в певному конкретному випадку практики може бути прийнято замість нього, називають **дійсним значенням фізичної величини**.

У геодезії значення фізичної величини, яке за певних умов вимірювань є *найбільш близьким за вірогідністю* до дійсного значення, називають **найвірогіднішим значенням**.

2.3. Вимірювання і їх класифікація

Вимірюванням називають знаходження значення фізичної величини дослідним шляхом за допомогою спеціальних технічних засобів. Схемний процес вимірювань показаний на рис. 2.7. Тут показані основні елементи процесу геодезичних вимірювань. У основі цього процесу лежить об'єкт геодезичного вимірювання, під яким розуміють предмети матеріального світу (місцевість, споруди, виробничі приміщення і таке інше), які характеризуються однією або декількома геодезичними величинами, що підлягають вимірюванням.

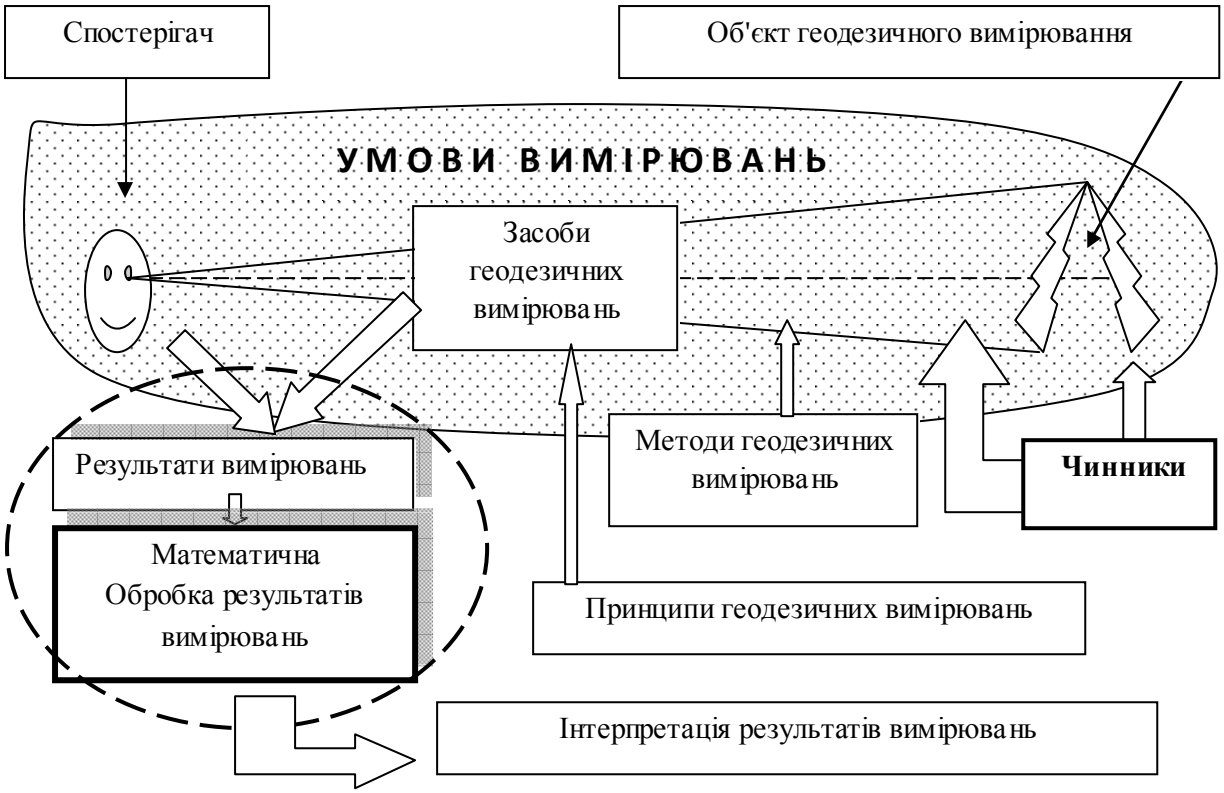


Рис. 2.7 - Узагальнена схема геодезичних вимірювань

Спостерігач, виходячи з умов вимірювань, обирає засоби і методи геодезичних вимірювань для отримання необхідних результатів.

Умови проведення геодезичних вимірювань визначають виходячи з безлічі чинників зовнішнього середовища, вимірювань, що впливають на процес. До них належать кліматичні, механічні, електромагнітні, світлові, шумові та ін., що виявляються під час проведення геодезичних вимірювань. Крім того, важливим чинником, що має вплив на вимірювання, є психофізіологічний стан спостерігача і його професійний досвід.

Умови геодезичних вимірювань прийнято вважати за однакові, якщо:

- вимірювалися фізичні об'єкти одного і того ж роду;
- вимірювання здійснювалися виконавцями однакової кваліфікації;
- вимірювання проводилися однаковими за якістю приладами;
- застосовувався один і той же метод вимірювань;

- стан зовнішнього середовища у процесі вимірювань змінювався в однакових межах.

Якщо вимірювання виконані за однакових умов, їх результати вважають *рівноточними*. Недотримання хоч би однієї з перерахованих вище умов робить результати *нерівноточними*.

Обирання засобів геодезичних вимірювань і вивчення їх технічних характеристик є предметом вивчення геодезії, тому коротко нагадаємо, що в засобах геодезичних вимірювань (геодезичних приладах) реалізуються різні фізичні явища: оптичний, оптико-механичний, оптико-електронний, електромагнітний, імпульсний, фазовий, супутниковий, доплеровский, інтерференційний та ін.

Детальніше розглянемо методи геодезичних вимірювань, під якими розуміють сукупність операцій (правив, прийомів) з виконання геодезичних вимірювань відповідно до принципу вимірювань, виконання яких забезпечує отримання результатів із заданою точністю,яка реалізовується. У геодезії розрізняють наступні методи вимірювань:

- метод прямих геодезичних вимірювань, за якого значення вимірюваної геодезичної величини отримують безпосередньо;

- метод непрямих геодезичних вимірювань, за якого значення геодезичної величини визначають як функцію інших величин, отриманих безпосередньо;

- метод вимірювань у всіх комбінаціях (комбінований метод) полягає в отриманні не лише геодезичних величин, розташованих між суміжними пунктами, але і їх різних поєднань (комбінацій);

- метод прийомів, полягає в неодноразових визначеннях однієї і тієї ж геодезичної величини за єдиною методикою.

- метод кругових прийомів полягає у вимірюванні кутів шляхом послідовного спостерігання візирних цілей, розташованих по колу з повторним спостеріганням першого (початкового) напряму;

- метод подвійних вимірювань, полягає у виконанні однорідних геодезичних вимірювань серіями, що складаються з двох прийомів (спостережень);

- метод повторень (метод реітерацій) полягає у визначенні n-кратного значення вимірюваної геодезичної величини і наступному обчисленні шуканого значення;

- метод вимірювань "вперед" полягає в спостеріганні за точкою передньою за ходом;

- метод вимірювань "з середини" полягає в послідовному спостеріганні суміжних пунктів (точок) ходу, що прокладається, за допомогою приладу, розташованого між ними;

- метод вимірювань "через точку" виконується при встановленні приладу або на парних, або на непарних пунктах ходу;

- багатоштативний метод вимірювань, полягає в зниженні похибок центрування шляхом встановлення одночасно на декількох суміжних пунктах мережі штативів із підставками для розміщення в них візирних цілей або приладу. Найбільшого поширення на практиці набув трьохштативний метод вимірювань.

Вимірювання також класифікуються за необхідними і додатковими або надмірними. Їх називають необхідними, якщо вони дають *тільки один результат* прямого вимірювання, непрямого вимірювання або *тільки одне значення* функції вимірюванних величин.

Прикладами необхідних вимірювань є: одноразове вимірювання довжини лінії мірною стрічкою або далекоміром, вимірювання горизонтального кута теодолітом одним напівприйомом, визначення тахеометром перевищення із станції на рейковий пікет, визначення координат точки засічкою за двома вимірюваними кутами, n-1 вимірюємих ліній і кутів у теодолітному ході з n-точок.

Необхідні вимірювання неможливо проконтролювати, тому немає можливості оцінити їх якість.

Усі вимірювання, виконані понад необхідні, які дозволяють отримати два і більш значення за результат або два і більш значення функції, називають надлишковими.

Надлишкові вимірювання дають можливість:

- здійснити контроль вимірювань;
- оцінювати точність виконаних вимірювань;
- набути таких наближених значень вимірюваних величин, які в загальному випадку опиняються ближчими до дійсного значення, ніж окремо отриманий результат необхідного вимірювання.

На процес вимірювання переважно, впливають наступні чинники, що взаємодіють між собою:

- специфіка об'єкта вимірювання;
- психофізіологічний стан і кваліфікація суб'єкта вимірювання, тобто виконавця;
- особливості мірного приладу, за допомогою якого виконавець здійснює вимірювання;
- особливості методу вимірювання, що визначає вимірювальний процес;
- специфіка зовнішнього середовища, у якому перебігає процес вимірювання.

Значення фізичної величини, знайденої шляхом її вимірювання, називають **результатом вимірювання**. Результат вимірювання у загальному вигляді можна представити формулою

$$l = n\, l_0 , \qquad (2.1)$$

де l — результат вимірювання; l_0 — значення одиниці вимірювання, n — кількість одиниць вимірювання.

За фізичним виконанням розрізняють прямі або безпосередні вимірювання, коли шукана величина безпосередньо порівнюється з одиницею вимірювання, і непрямі, коли значення вимірюваної величини є функцією одного або декількох аргументів виміряних безпосередньо абоопосередковано.

За приклади безпосередніх вимірювань можна вважати вимір температури термометром, вимір маси тіла на рівноплечних вагах шляхом порівняння її із масою гирь, вимір довжини лінії мірною лінійкою.

За приклад непрямих вимірів можна вважати вимір довжини лінії нитяним далекоміром і обчисленні її за формулою

$$D = kl + C, \tag{2.2}$$

де довжина лінії D визначається як функція безпосередньо зміряного відрізання рейки l, який розтошований між далекомірними штрихами, і параметрів далекоміра — коефіцієнта k; постійного доданку C.

За інший приклад непрямих вимірів можна вважати вимір перевищення тригонометричної нівеляції за формулою

$$h = \tfrac{1}{2} D \sin 2\nu + I - V, \tag{2.3}$$

де перевищення h визначається як функція опосередковано виміряних далекомірних відстаней D, кута нахилу ν і безпосередньо виміряних висоти приладу I і точки візування V.

Завершальною процедурою в процесі геодезичних вимірювань є **математична обробка** отриманих результатів. Ця процедура отримання результатів геодезичних вимірювань і оцінки їх точності шляхом проведення обчислювальних операцій із виміряними значеннями геодезичних величин за певним алгоритмом. У основі математичної обробки геодезичних вимірювань лежать математичні методи і моделі теорії ймовірності, математичної статистики і теорії помилок (погрішностей).

У процесі математичної обробки результатів вимірювань можна виділити наступні етапи:

- систематизація і класифікація результатів вимірів;
- виявлення характеру помилок вимірів (випадкові або систематичні);
- обчислення чисельних значень помилок вимірів;
- обчислення поправок і вагів функцій результатів вимірів;
- оцінка точності результатів вимірів;
- оцінка надійності результатів вимірів;
- оцінка прєцізіоності результатів вимірів.

Таким чином, розглянути основні елементи і дані загальних характеристик процесу вимірювань. Наведені методи вимірювань їх класифікація. Виділені основні етапи математичної обробки результатів геодезичних вимірювань.

2.4. Похибки вимірів і їх класифікація

Похибка вимірювань визначає як оцінку відхилення величини виміряного значення від її дійсного значення. Похибка вимірювання є характеристикою (мірою) точності вимірювання.

Залежно від характеру вимірюваної величини для визначення похибки вимірювань використовують різні методи.

Метод Корфельда полягає у виборі надійного інтервалу в межах від мінімального до максимального результату вимірювань, і похибка Δx як половина різниці між максимальним (x_{max}) і мінімальним (x_{min}) результатом вимірювання

$$\Delta x = \frac{x_{max} - x_{min}}{2}. \qquad (2.4)$$

Средньоквадратична похибка обчислюється за формулою

$$S = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - x)^2}{n-1}}. \qquad (2.5)$$

Средньоквадратична похибка середнього арифметичного обчислюється за формулою

$$S_x = \frac{S}{\sqrt{n}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - x)^2}{n(n-1)}}. \qquad (2.6)$$

У теорії похибок виділяють наступні класи похибок: за формою представлення похибки, унаслідок їх виникнення і за характером прояву.

За формою представлення похибок розрізняють наступні похибки.

Абсолютна похибка - ΔX є оцінкою абсолютної помилки вимірювання. Величина цієї похибки залежить від способу її обчислення, який, у свою чергу, визначається розподілом випадкової величини x_{meas}. При цьому рівність

$\Delta X = |X_{true} \quad X_{meas}|$, де X_{true} - дійсне значення, а X_{meas} - виміряне значення, повинно виконуватися з деякою ймовірностью близькою до 1. Якщо випадкова величина X_{meas} розподілена за нормальном законм, то за абсолютну похибку приймають середньоквадратичне відхилення. Абсолютна похибка вимірюється в тих же одиницях вимірювання, що й сама величина.

Відносна похибка – відношення абсолютної похибки до того значення, яке приймається за дійсне значення і обчислюється за формулою

$$\delta = \frac{\Delta x}{X}. \tag{2.7}$$

Відносна погрішність є безрозмірною величиною або вимірюється у відсотках.

Приведена похибка – відносна похибка, виражена відношенням абсолютної похибки засобу вимірювань до умовно набутого значення величини, постійного в усьому діапазоні вимірювань або частини діапазону. Вона обчислюється за формулою

$$\delta_x = \frac{\Delta x}{X_n}, \tag{2.8}$$

де X_n - нормоване значення, яке залежить від типу шкали вимірювального приладу і визначається за його градуюванням:

- якщо шкала приладу одностороння, тобто нижня межа вимірювань дорівнює нулю, то X_n визначається рівним верхньої межі вимірювань;

- якщо шкала приладу двостороння, то нормуюче значення дорівнює ширині діапазону вимірювань приладу.

Приведена похибка є безрозмірною величиною і може вимірюватися у відсотках.

Унаслідок виникнення розрізняють наступні погрішності:

Інструментальні (приладові погрішності)- ті, які визначаються похибки вживаних засобів вимірювань і викликаються недосконалістю принципу дії, неточністю градуювання шкали і її ергономічністю.

Методичні похибки – ті, які зумовлені недосконалістю методу, а також спрощеннями, покладеними в основу методики вимірювань.

Суб'єктивні (операторні) похибки – ті, які зумовлені ступенем уважності, зосередженості, підготовленості і іншими психофізіологічними якостями людини, яка здійснює вимірювання.

У процесі вимірювань застосовують прилади для вимірювання лише з визначеною заздалегідь заданою точністю – основною похибкою, нормалі, що припускається, за нормальних умов експлуатації для певного приладу. Якщо вимірювальний прилад використовують в умовах відмінних від нормальних умов, то виникає додаткова похибка, що збільшує загальну похибку приладу. До додаткових похибок відносять: температуру, викликана відхиленням температури навколишнього середовища від нормальної, встановча, зумовлена відхиленням положення приладу від нормального робочого положення і так далі За нормальну температуру навколишнього повітря приймають 20^0С, за нормальний атмосферний тиск 101,325 кПа.

Узагальненою характеристикою засобів вимірювання є клас точності, визначений граничними значеннями припустимих основні і додаткові похибок. Клас точності засобів вимірювання характеризує їх точностні властивості, але не є безпосереднім показником точності вимірювань, що виконуються за допомогою цих засобів, тому що точність залежить також від методу вимірювань і умов їх виконання.

За характером прояву розрізняють наступні похибки.

Грубі погрішності або промахи, які різко відхиляють результати вимірювань від дійсного значення. Вони завжди виникають тільки з вини виконавця (оператора). У теорії похибок грубі похибки не вивчають. Їх необхідно своєчасно виявляти, а результати вимірювань, що містять ці похибки, виключати з

подальшої обробки. Найбільш дієвими методами виявлення грубих погрішностей є методи надмірних вимірювань. От чому в геодезії кожну величину вимірюють, переважно не менше двох разів.

Систематичні елементарні погрішності породжуються істотними зв'язками між чинниками, що впливають на вимірювання, і виникають кожного разу за одних і тих же умов. Систематичні похибки підпорядковані якійсь в тому або іншому ступені певній закономірності. Ці закономірності піддаються вивченню і за певних умов систематичні похибки можуть бути виключені з окремого результату вимірювань.

Випадкові елементарні погрішності породжуються не істотними, а другорядними випадковими зв'язками між чинниками вимірювань, за певних умов вимірювань. Вони можуть з'являтися в процесі вимірювань, а можуть і не з'явитися, можуть бути великими або малими, позитивнішими або негативними. Величина і знак цих погрішностей має випадковий характер, а їх розподіл підпорядкований законам теорії ймовірності.

Випадкові погрішності не можуть бути виключені з окремого результату вимірювання. Вплив їх на результати вимірювань можна лише послабити, підвищуючи кваліфікацію виконавця, вдосконалювати вимірювальні прилади і методику вимірювань, виконуючи вимірювання за сприятливіших умов. Вплив випадкових похибок можна також послабити належною математичною обробкою результатів вимірювань.

Сумарний вплив елементарних систематичних похибок утворює систематичну похибку θ результату вимірювання, а сумарний вплив елементарних випадкових похибок – випадкову похибку Δ результату вимірювань.

Таким чином, похибка вимірювання ε можна представити як суму двох складових

$$\varepsilon = \theta + \Delta. \qquad (2.9)$$

На практиці при здійсненні геодезичних вимірювань системні і випадкові погрішності виникають спільно, тому їх поділ у процесі обробки результатів вимірювань єнадзвичайно важким. Більше того, в деяких випадках похибки, випадкові за походженням, за певних умов стають систематичними.

Приклад 2.1. Похибки вимірювання висот точок знімальної мережі, отриманих з геометричної або тригонометричної нівеляції, за своєю природою є випадковими. Проте при тахометричній або мензульній зйомці у цій конкретній ситуації ця погрішність постійна за величиною і знаком, а тому увійде до висот рейкових пікетів як систематична.

2.5. Властивості випадкових похибок

Розглядаючи властивості випадкових похибок, матимемо на увазі не їх індивідуальні властивості, а найбільш загальні інтегральні властивості, які мають достатньо великі сукупності цих погрішностей.

У теорії похибок виділяють чотири таки властивості.

Властивість обмеженості. За певних умов вимірювань випадкова похибка за абсолютною величиною не може перевищити певну відому межу. Ця межа називається граничною похибкою. Позначивши її $\Delta_{пр}$ цю властивість можна виразити нерівністю

$$|\Delta| \leq \Delta_{пр}. \tag{2.10}$$

Властивість компенсації. Якщо ряд вимірювань однієї або декількох величин здійснюється в одних і тих же умовах, то сума випадкових похибок, що ділиться на їх кількість, при необмеженому збільшенні ряду вимірювань в границі наближається до нуля, тобто

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[\Delta]}{n}=0. \tag{2.11}$$

У вираженні (2.11) і надалі використовуватимемо символіку К.Ф. Гаусса, де квадратні дужки означають суму однорідних величин. Наприклад.

$$[\Delta]=\Delta_1+\Delta_2+...+\Delta_n;$$

$$[\Delta^2]=[\Delta\Delta]=\Delta_1^2+\Delta_2^2+...+\Delta_n^2;$$

$$[aa]=a_1^2+a_2^2+...+a_n^2;$$

$$[ab]=a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n. \tag{2.12}$$

Властивість незалежності. Якщо здійснюється два ряди вимірювань з випадковими погрішностями: 1) $\Delta'_1, \Delta'_2, ..., \Delta'_n$ і 2) $\Delta''_1, \Delta''_2, ..., \Delta''_n$, то сума попарних добутків цих погрішностей, що ділиться на кількість цих добутків, при необмеженому зростанні кількості вимірювань в межі наближається до нуля.

Використовуючи символіку К.Ф.Гаусса, цю властивість можна записати формулою

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[\Delta'\Delta'']}{n}=0. \qquad (2.13)$$

Ця властивість не є всеоохоплюючою. У геодезичній практиці зустрічається не часто, але зустрічаються залежні випадкові похибки.

Властивість розсіювання. Якщо ряд вимірювань здійснюється за одних і тих же умов, то для випадкових погрішностей має місце межа

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[\Delta^2]}{n}=\sigma^2. \qquad (2.14)$$

Величина σ називається стандартом. Квадрат стандарту σ^2 називають дисперсією, а величину

$$p=\frac{c}{\sigma^2}, \qquad (2.15)$$

де c – довільне позитивне число називають **вагою**.

Із співвідношень (2.14) і (2.15) виходить: ряди вимірювань, виконані з більшою точністю, мають менший стандарт та дисперсію і велику вагу.

Додаткові джерела інформації

1. Википедия [электронный ресурс] / Метрология #. Режим доступа. - http://ru. wikipedia. org/ wiki/ Заголовок с экрана 11.12.09.
2. Галилей [электронный ресурс] / Г. Галилей. - Режим доступа. - http://ru. wikipedia.org/wiki/ Заголовок с экрана 01.08.09.

3. Рене Декарт. Рассуждение о методе, чтобы верно направлять свой разум и отыскивать истину в науках [электронный ресурс] / Рене Декарт.- Режим доступа. - http://psylib.org.ua/books/dekar01/ Заголовок с экрана 21.09.09.

4. Математика [электронный ресурс] / Сайт Комітету питань науки і освіти. - Режим доступу. - http://ru.wikipedia.org/wiki/ Заголовок с экрана 29.09.09.

5. Гюйгенс, Христиан. Энциклопедия «Кругосвет» [электронный ресурс] / Гюйгенс, Христиан. - Режим доступа. - http://slovari.yandex.ru/dict/ krugosvet/article/3/35/1003945.htm. Заголовок с экрана 17.08.09.

6. Паскаль, Блез [электронный ресурс] / Блез Паскаль. - Режим доступа. - http://ru.wikipedia.org/wiki/ Заголовок с экрана 17.08.09.

7. Ньютон, Исаак [электронный ресурс] / Исаак Ньютон. - Режим доступа. - http://ru.wikipedia.org/wiki/ Заголовок с экрана 09.07.09.

8. Колмогоров, А. Н. Математика XIX века [Текст] / А. Н. Колмогоров, А. П. Юшкевич. - М.: Наука, 1980. – 128 с.

9. Гаусс. Словари и энциклопедии [электронный ресурс] / К.Ф. Гаусс. - Режим доступа. - http://dic.academic.ru/dic.nsf/bse / Заголовок с экрана 19.09.09.

10. Гаусс, Карл Фридрих. Википедия [электронный ресурс] / К.Ф. Гаусс. - Режим доступа. - http://ru.wikipedia.org/wiki / Заголовок с экрана -6.06.09.

11. Войславский, Л.К. Теория математической обработки геодезических измерений. Часть 1. Теория погрешностей измерений [Текст] учебно-методическое пособие (для студентов 2 курса дневной формы обучения спец. 7.070908 «Геоинформационные системы и технологии») / Л.К. Войславский. – Х.: ХНАГХ, 2006. – 64 с.

12. Погрешность измерения [электронный ресурс] / Сайт Комітету питань науки і освіти. - Режим доступу. - http://ru.wikipedia.org/wiki/ Заголовок с экрана - 5.11.09.

Змістовий модуль 3

Кількісні критерії оцінювання точності вимірювань

3.1. Моделі розподілу випадкових похибок вимірювань

Вище було показано, що випадкова похибка є наслідком впливу на результат вимірів різних випадкових взаємопов'язаних чинників. Її можна інтерпретувати як алебраїчну суму безлічі елементарних випадкових похибок.

Проаналізуємо процес формування випадкових похибок на прикладі вимірювання перевищення при геометричній нівеляції. Для цього розглянемо випадкові похибки округлення відліку, узятого по рейці із точністю до 1 мм. Задамо інтервал вимірювань, і вважатимемо, що вимірювання виконують в інтервалі від – 0,5 до + 0,5 (див. рис.3.1).

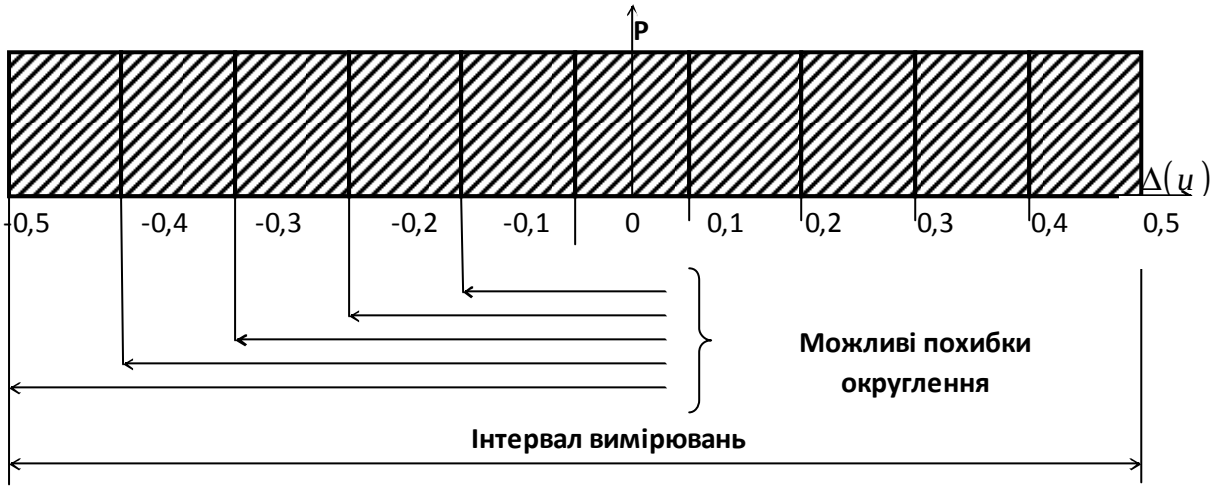


Рис. 3.1 - Рівномірний розподіл помилок вимірювань

Усі можливі значення похибок округлення $\Delta(u)$ укладаються в десять фіксованих рівноімовірних інтервалів:

1) [- 0,5 – - 0,4]; 2) [- 0,4 – - 0,3]; 3) [- 0,3 – - 0,2]; 4) [- 0,2 – - 0,1];
5) [- 0,1 – 0]; 6) [0 – 0,1]; 7) [0,1 – 0,2]; 8) [0,2 – 0,3]; 9) [0,3 – 0,4];
10) [0,4 – 0,5].

Тут квадратними дужками позначені інтервали округлення на осі $\Delta(u)$. Ймовірність потраплення похибок округлення у будь-який з інтервалів, представлених на рис.3.1, дорівнює 0,1.

Процес округлення вимірів має дискретний характер і тому при оцінюванні точності вимірів у певному випадку можна скористатися відомими з теорії ймовірності властивостями закону рівномірного розподілу випадкових величин (вимірів): функцією ймовірності, функцією розподілу, математичним очікуванням, медіаною та ін.

Відзначимо, що так само будуть розподілені елементарні похибки округлення відліків по горизонтальному і вертикальному колу теодоліта, відліків по рейці при визначенні відстаней нитяним далекоміром, відліків рахункового механізму планіметра і в інших випадках геодезичної практики.

Відомо, що перевищення дорівнює різниці відліків $h = u_з - u_п$. Усі можливі значення похибок округлення $\Delta(h)$ обчисленого перевищення наведені в табл. 3.1.

Таблиця 3.1 - Значення можливих похибок округлення

$\Delta(u)$	- 0,5	- 0,4	- 0,3	- 0,2	- 0,1	0	+ 0,1	+ 0,2	+ 0,3	+ 0,4	+ 0,5
- 0,5	0	- 0,1	- 0,2	- 0,3	- 0,4	- 0,5	- 0,6	- 0,7	- 0,8	- 0,9	- 1,0
- 0,4	+ 0,1	0	- 0,1	- 0,2	- 0,3	- 0,4	- 0,5	- 0,6	- 0,7	- 0,8	- 0,9
- 0,3	+ 0,2	+ 0,1	0	- 0,1	- 0,2	- 0,3	- 0,4	- 0,5	- 0,6	- 0,7	- 0,8
- 0,2	+ 0,3	+ 0,2	+ 0,1	0	- 0,1	- 0,2	- 0,3	- 0,4	- 0,5	- 0,6	- 0,7
- 0,1	+ 0,4	+ 0,3	+ 0,2	+ 0,1	0	- 0,1	- 0,2	- 0,3	- 0,4	- 0,5	- 0,6
0	+ 0,5	+ 0,4	+ 0,3	+ 0,2	+ 0,1	0	- 0,1	- 0,2	- 0,3	- 0,4	- 0,5
+ 0,1	+ 0,6	+ 0,5	+ 0,4	+ 0,3	+ 0,2	+ 0,1	0	- 0,1	- 0,2	- 0,3	- 0,4
+ 0,2	+ 0,7	+ 0,6	+ 0,5	+ 0,4	+ 0,3	+ 0,2	+ 0,1	0	- 0,1	- 0,2	- 0,3
+ 0,3	+ 0,8	+ 0,7	+ 0,6	+ 0,5	+ 0,4	+ 0,3	+ 0,2	+ 0,1	0	- 0,1	- 0,2
+ 0,4	+ 0,9	+ 0,8	+ 0,7	+ 0,6	+ 0,5	+ 0,4	+ 0,3	+ 0,2	+ 0,1	0	- 0,1
+ 0,5	+ 1,0	+ 0,9	+ 0,8	+ 0,7	+ 0,6	+ 0,5	+ 0,4	+ 0,3	+ 0,2	+ 0,1	0

Усього можливе 121 значення похибок округлення в межах усього інтервалу вимірювань [- 0,5 – + 0,5], які можна об'єднати в 21 групу рівних значень, враховуючи, що ймовірність округлення вимірювань в межах одного інтервалу, наприклад [- 0,5 – - 0,4] або [+ 0,5 – + 0,4] або [+ 0,1 – + 0,2] вища, ніж ймовірність округлення в інтервалах [- 0,5 – - 0,3] або [- 0,5 – - 0,2] або [+ 0,1 – + 0,5] і таке інше. Ймовірність таких округлень розподілена за законом Сімпсона, «трикутник розподілу». Аналітичний вираз трикутного розподілу Сімпсона, характеристична функція і його властивості наведені в додатку.

Для наведеного вище прикладу випадкових погрішностей округлення розподіл Сімпсона показаний на рис. 3.2.

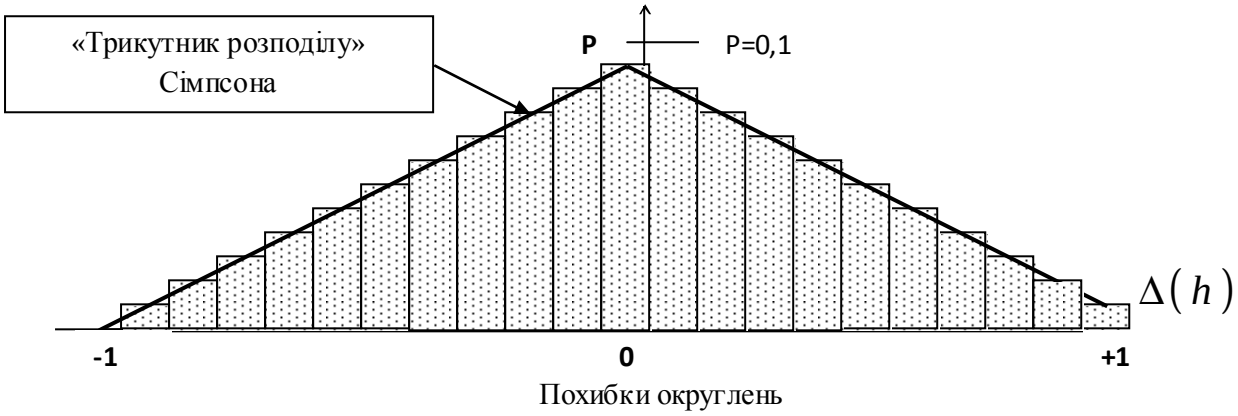


Рис. 3.2 - Ілюстрація розподілу похибки округлень на інтервалі вимірів [- 0,5 – + 0,5]

Як приклад наведемо табл. 3.2, де в чисельному вигляді представлені співвідношення погрішностей округлення і ймовірністю їх появи.

Таблиця 3.2 - Приклад чисельних співвідношень ймовірності і величин похибки округлення

Значення середини інтервалу	Діапазон значень в інтервалі	Обчислене перевищення на станції		Середнє перевищення на станції	
		Кількість випадків h	**Вірогідність**	**Кількість випадків h**	**Вірогідність**
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
- 1,0	-1,05 – -0,95	1	0,0083	3	0,002
- 0,9	-0,95 – -0,85	2	0,0165	22	0,0015

Продовження табл.3.2

1	2	3	4	5	6
- 0,8	-0,85 – -0,75	3	0,0248	73	0,0050
- 0,7	-0,75 – -0,65	4	0,0331	172	0,0117
- 0,6	-0,65 – -0,55	5	0,0413	335	0,0229
- 0,5	-0,55 – -0,45	6	0,0496	576	0,0393
- 0,4	-0,45 – -0,35	7	0,0579	879	0,0600
- 0,3	-0,35 – -0,25	8	0,0661	1198	0,0818
- 0,2	-0,25 – -0,15	9	0,0744	1485	0,1014
- 0,1	-0,15 – -0,05	10	0,0826	1612	0,1156
0	-0,05 – +0,05	11	0,0909	1771	0,1210
+ 0,1	+0,05 – +0,15	10	0,0826	1692	0,1156
+ 0,2	+0,15 – +0,25	9	0,0744	1485	0,1014
+ 0,3	+0,25 – +0,35	8	0,0661	1198	0,0818
+ 0,4	+0,35 – +0,45	7	0,0579	879	0,0600
+ 0,5	+0,45 – +0,55	6	0,0496	576	0,0393
+ 0,6	+0,45 – +0,55	5	0,0413	335	0,0229
+ 0,7	+0,55 – +0,65	4	0,0331	172	0,0117
+ 0,8	+0,75 – +0,85	3	0,0248	73	0,0050
+ 0,9	+0,85 – +0,95	2	0,0165	22	0,0015
+ 1,0	+0,95 – +1,05	1	0,0083	3	0,0002
		121	1,0001	14641	0,9998

У геометричній нівеляції перевищення на станції вимірюють двічі, по основній (чорною) і зміщеній (червоною) боками рейки. За остаточний результат зміряного перевищення вважають середнє значення. Для середнього перевищення h можливо $N = 121^2 = 14641$ варіантів випадкової елементарної похибки округлення. Усю безліч значень можна об'єднати в 21 інтервал групування, як це показано в правій частині табл. 3.2. За даними цієї таблиці побудуємо криву розподілу випадкових похибок вимірювань (див. рис. 3.3.), що виражає деяку функцію $f(\Delta)$.

Відзначимо очевидні властивості цієї функції:

1. Функція завжди позитивна і симетрична щодо осі ординат.
2. Функція має максимум у точці $\Delta = 0$, де похідна функції $f'(\Delta)=0$.
3. Зі збільшенням абсолютної величини Δ функція $f(\Delta)$ асимптотично наближається до осі Δ.
4. Позитивним значенням Δ відповідають негативні значення $f'(\Delta)$, а негативним Δ - позитивні значення $f'(\Delta)$, тобто має місце нерівність $f'(\Delta)\cdot\Delta<0$.
5. Представлені в правій частині табл. 3.2 ймовірності вичерпують усі можливі значення $f(\Delta)$. Отже, площа фігури, обмежена віссю Δ і кривою має дорівнювати одиниці.

Перерахованим вище умовам відповідає функція, рівняння якої має вигляд:

$$f(\Delta)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}} \quad . \tag{3.1}$$

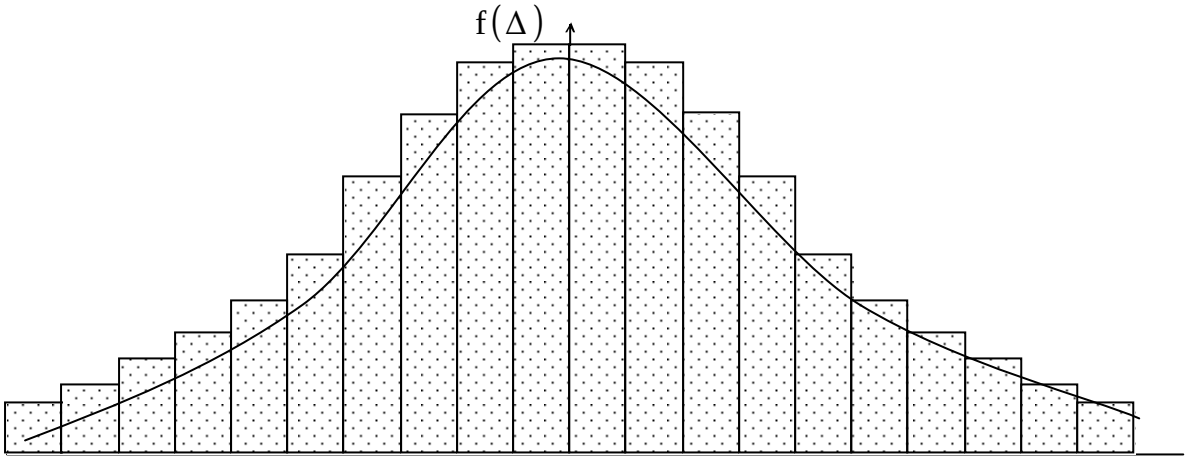


Рис. 3.3 - Нормальний закон розподілу

Параметр σ в (3.1) визначає стандарт, який був викладений у попередньому підрозділі. Чим менше σ, тим тісніше групуються значення Δ щодо осі $f(\Delta)$.

Розподіл випадкових похибок, представлений функцією (3.1), називають нормальним розподілом.

У розглянутому вище прикладі досліджувалося лише одне джерело формування випадкових похибок – похибок округлення відліку. Однак відомо, що на точність вимірювання перевищення методом геометричної нівеляції окрім похибок округлення впливають також похибки, зумовлені випадковими коливаннями візирної осі приладу, коливання зображення рейки внаслідок рефракції та інші чинники.

Аналогічне явище має місце і в інших видах геодезичних вимірюваннях – горизонтальних і вертикальних кутів і напрямів, довжин ліній і так далі. Усе це дає підставу розглядати нормальний розподіл (3.1) як універсальний закон імовірнісного розподілу випадкових похибок.

3.2. Моделі розподілу систематичних похибок вимірювань

Систематичні похибок, геодезичних вимірювань, дуже різноманітні. Розподіл ряду систематичних похибок, що викликаються тим або іншим джерелом, відбувається за своїм, властивим цьому джерелу похибок, закону. Розглянемо деякі з них:

1. Характеристика постійних систематичних по похибок.

У всіх результатах вимірів такі похибки мають однакову величину і знак. Класичний приклад такої похибок – відхилення стрілки від нульової відмітки перед зважуванням у вагів із стрілочною індикацією.

У практиці геодезичних вимірювань це - погрішності координат і висот опорних точок, похибка визначення місця нуля вертикального круга при тахометричної зйомці.

Підвищуючи точність вимірювань, при визначенні опорних точок і ретельніше визначаючи місця нуля, можна звести постійні систематичні похибки до величин якими нехтуємо порівняно з випадковими погрішностями.

При точних кутових вимірюваннях визначають елементи відхилення приладу і візирних цілей від центрів знаків і впроваджують відповідні поправки (на центрування і редукцію) до результати вимірювань.

2. Характеристика змінних систематичних похибок, залежних від величини вимірюваного об'єкту і зовнішніх умов вимірювань.

Розглянемо приклади такого роду похибок (див. рис. 3.4). Якщо довжина стрічки або рулетки відхиляється від нормального значення на величину, то результат вимірювання лінії буде викривлений систематичною похибкою

$$\Theta_k = n\delta, \tag{3.2}$$

де n – кількість відкладень мірного приладу вздовж вимірюваної лінії.

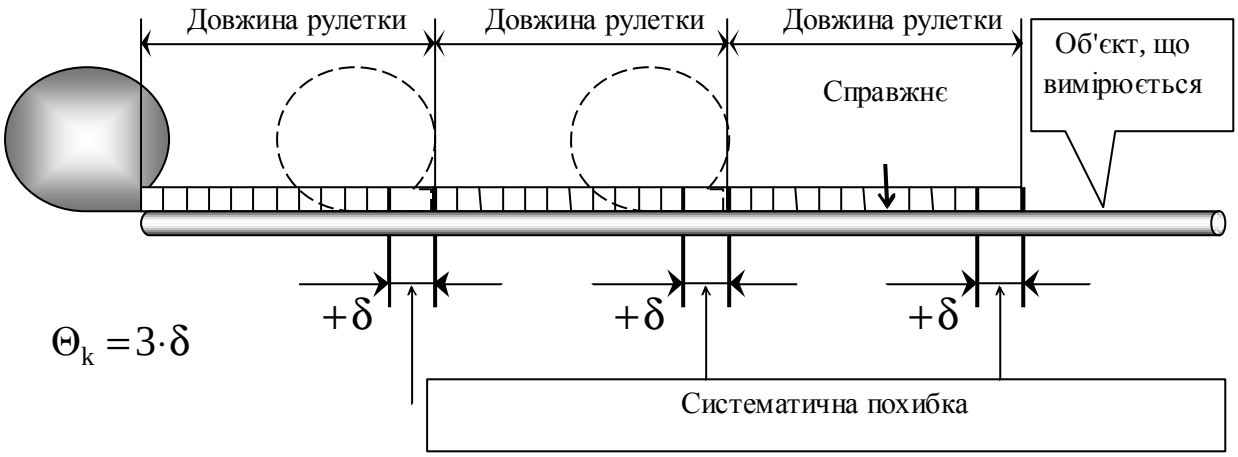


Рис. 3.4 - Ілюстрація систематичних похибок

Для усунення цієї погрішності необхідно стрічку або рулетку перед початком роботи прокомпарувати, визначити величину і вводити до всіх результатів вимірювань поправки, що обчислюються за формулою (3.2). Ця поправка має знак «+», якщо $\delta > 0$, і знак «-», якщо $\delta < 0$.

Інший приклад. Компорування стрічки або рулетки здійснюється за певної температури t_0. Реальні вимірювання здійснюють за температури t. Внаслідок цього виникає систематична похибка, зумовлена зміною довжини приладу

$$\Theta_t = \alpha(t_0 - t)D, \tag{3.3}$$

де α - коефіцієнт лінійного розширення матеріалу, з якого виготовлений мірний прилад; D – довжина заміряної лінії. Замірявши температуру t, можна обчислити величину Θ_t і ввести до результату вимірювання поправку, яка дорівнює - Θ_t.

3. Характеристика періодичних систематичних похибок

Це інструментальні похибки, зумовлені ексцентриситетом алідади горизонтального або вертикального кола теодоліта. Вони мають періодичний характер з періодом, що дорівнює $360°$. Рівняння компенсації цієї похибки має вигляд

$$\Theta_э = e \cdot \sin(u - u_e), \qquad (3.4)$$

де e – лінійний елемент ексцентриситету; u_e - результат відліку за лімбом, який відповідає діаметру, що співпадає з елементом e; u - результат довільного відліку за лімбом. Ексцентриситет алідади може бути визначений експериментально. За експериментальними даними обчислюється $\Theta_ý$ за формулою (3.4) і у разі потреби в виміряні дані напрями вводяться відповідні поправки.

4. Характеристика однобічних діючих систематичних поправок

Такого роду похибки мають місце:

- внаслідок випадкових відхилень мірного приладу від створу лінії при вимірюванні довжин ліній мірною стрічкою або рулеткою;

- внаслідок випадкових відхилень рейки від вертикального положення при геометричній нівеляції.

Якими б не були величини і знак цих відхилень, в тому і іншому випадках вони неминуче збільшують довжину вимірюваної лінії або результат відліку за рейкою. Визначити величину такого роду похибки неможливе. Для послаблення їх впливу застосовують більш точні методи вкладання мірного приладу в створі лінії, в першому випадку, або використовують рейки, забезпечені круглим рівнем, - в другому.

3.3. Кількісні критерії оцінювання точності ряду рівноточних вимірювань однієї величини

Завдання знаходження найбільш надійних значень вимірювань величин призводить до розв’язання інших завдань, зокрема визначення точності результатів оцінювання вимірювань. Очевидно, що на основі одного вимірювання оцінити точність отриманого результату не є можливим. Однак, якщо буде ві-

дома велика кількість результатів вимірювань певної величини і дійсні погрішності, то, проаналізувавши їх, можна уникнути грубих похибок, а в деяких випадках і систематичних похибок. Після цього можна отримати ряд випадкових дійсних похибок.

Розглядаючи декілька рядів випадкових дійсних похибок, можна оцінити точність результатів вимірювань за ступенем їх розкиду, тобто чим менше вони відрізняються один від одного, тим вони точніше, і навпаки - тим менш точними слід їх вважати.

Для оцінки точності результатів вимірювань прийняті наступні критерії: середня похибка, імовірнісна похибка і середня квадратична похибка.

Середньою похибкою θ називають середнє арифметичне абсолютних значень помилок Δ_i $\left(i=\overline{1,n}\right)$ результатів вимірювань

$$\theta=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left|\Delta_i\right|}{n}=\frac{\left[\left|\Delta\right|\right]}{n}. \qquad (3.5)$$

Розглянемо довільний ряд випадкових похибок результатів вимірювань деякої величини.

Абсолютним варіаційним рядом випадкових похибок називають послідовність цих похибок, розміщених в порядку зростання або убування за їх абсолютною величиною.

Ймовірнісною похибкою ρ називають таке значення абсолютного варіаційного ряду випадкових похибок, яке ділить даний цей на дві рівні частини.

Розглянемо такий ряд випадкових погрішностей:

-0,01; 0,12; 0,56; -0,35; 0,06; -0,11; -0,05; -0,20; -0,08; 0,09; -0,19; -0,18; 0,32; -0,45; 0,30; -0,44; -0,57.

Побудуємо абсолютний варіаційний ряд або, іншими словами, ранжируємо ці величини без урахування їх знаків

0,01; 0,05; 0,06; 0,08; 0,09; 0,11; 0,12; 0,18; 0,19; 0,20; 0,30; 0,32; 0,35; 0,44; 0,45; 0,56; 0,57.

У середині цього ряду знаходиться значення 0,19. Отже ймовірнісна похибка вимірювань $\rho = 0{,}19$.

У наведеному прикладі кількість значень N ряду похибок дорівнює непарному числу 17. Якщо кількість значень N ряду похибок дорівнює парному числу, то ймовірнісною похибкою буде середнє арифметичне двох значень абсолютного варіаційного ряду, які знаходяться у середині ряду.

Середньоквадратичною похибкою m називають величину, яка дорівнює квадратному кореню із середнього арифметичного квадратів дійсних похибок

$$m = \pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\Delta_i^2}{n}} = \pm\sqrt{\frac{\left[\Delta^2\right]}{n}}. \qquad (3.6)$$

Середньоквадратична похибка є найбільш прийнятним критерієм для оцінювання точності вимірювань. Вона має наступні переваги порівняно із середньою і ймовірнісною похибками:

1. Середньоквадратична похибка є чутливою мірою точності тому, що на її величину сильно впливають великі за абсолютною величиною випадкові похибки, що визначають надійність результатів вимірювань.

2. Середньоквадратична похибка вже за деякої відносно невеликої кількості вимірювань набуває сталого значення і при збільшенні кількості вимірювань змінюється незначно.

3. На основі середньоквадратичної похибки можна знайти граничну похибку (див. властивість обмеженості), тобто таке найбільше за абсолютною величиною значення випадкової похибки, яке може з'явиться за певних умов вимірювань. Потрійна середньоквадратична похибка приймається за граничну, тобто

$$\Delta_{пр} = 3m. \qquad (3.9)$$

4. Знаючи середньоквадратичні похибки певних величин, можна легко визначити середньоквадратичні похибки інших величин, функціонально пов'язаних з ними.

Гранична похибка $\Delta_{пр}$, як і стандарт σ, залежать тільки від умов вимірювань. Отже, між цими величинами повинна існувати певна залежність.

У теорії ймовірності встановлено, що, якщо випадкові погрішності розподілені за нормальним законом, вираженим формулою (3.1), то ймовірності того, що $|\Delta| < 2\sigma = 0,9544$; $|\Delta| < 3\sigma = 0,9974$.

Це означає, що абсолютна величина випадкової похибки може бути більше 2σ лише в 5 випадках з 100 можливих, а більше 3σ тільки в 3 випадках з 1000 можливих.

Виходячи з цього і беручи до уваги те, що замість невідомого стандарту використовується середньоквадратична похибка, в геодезії прийнято як граничну похибку приймати величини

$$\Delta_{пр} = 2\sigma \approx 2m, \tag{3.10}$$

а при відносно невеликій кількості вимірюваних величин або при особливо відповідальних вимірюваннях

$$\Delta_{пр} = 3\sigma \approx 3m. \tag{3.11}$$

Отже, якщо будь-який результат вимірювань має похибку більшу за граничну, то такий результат містить грубу похибку і тому має бути виключений з подальшої обробки і замінений новим, отриманим під час повторних вимірювань.

В окремих випадках замість середньоквадратичної погрішності використовують середню похибку, яка обчислюється за формулою

$$v = \frac{[|\Delta|]}{n}. \tag{3.12}$$

У теорії ймовірності доведено, що між величинами m і v існують залежності

$$v = 0,7979m, \quad m = 1,2533v. \tag{3.13}$$

Таким чином, усі точкові оцінки, так або інакше, пов'язані з середньоквадратичною похибкою. Зі свого боку, величина m є наближеним значенням стандарту.

Виникає питання, на скільки і як швидке значення m, яке залежить від кількості вимірювань, наближається до σ ? Досліджуємо це на приватному прикладі з практики геодезичних вимірювань.

Приклад 3.1.

Вимірювалися горизонтальні кути теодолітом 2Т30М в умовах, які відповідають $\sigma = 30''$. У табл. 3.3 наведені значення середньоквадратичної похибки m вимірювань горизонтального кута, які проводилися серіями до k = 11. Перша серія складалася з 5 вимірювань, друга - з 10, третя - з 15 вимірювань і так далі З кожною серією додавалося 5 вимірювань, і 11 серія склала 55 вимірювань.

Таблиця 3.3 - Початкові дані для оцінки залежності m від σ

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
n	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
m [c]	35	31	29	28	29	28	29	29	29	32	**30**

У табл. 3.3. позначене n – кількість вимірювань в серії $k_i = \overline{1,11}$. З таблиці видно, що за $n>5$ значення m достатньо швидко наближається до межі $\lim\limits_{n\to\infty} m = \sigma$. У цьому випадку m залишається хоча і стійкою, проте, випадковою величиною, тобто містить деяку похибку. Тому необхідно оцінити точність і надійність величини m. Такою оцінкою може служити середня квадратична похибка m_m самої середньої квадратичної похибки m, яку обчислюють за наближеною формулою

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2n}}. \qquad (3.14)$$

Підставляючи у формулу (3.14) значення m і n з табл. 3.3 отримаємо певну залежність (див. рис.3.5), яка характеризує швидкість наближення m до σ.

Таким чином, за малої кількості вимірювань, що характерне у більшості випадків геодезичної практики, середня квадратична похибка має не більше однієї – двох значущих цифр.

Наведемо ще один приклад з оцінки точності рівноточних вимірювань однієї величини.

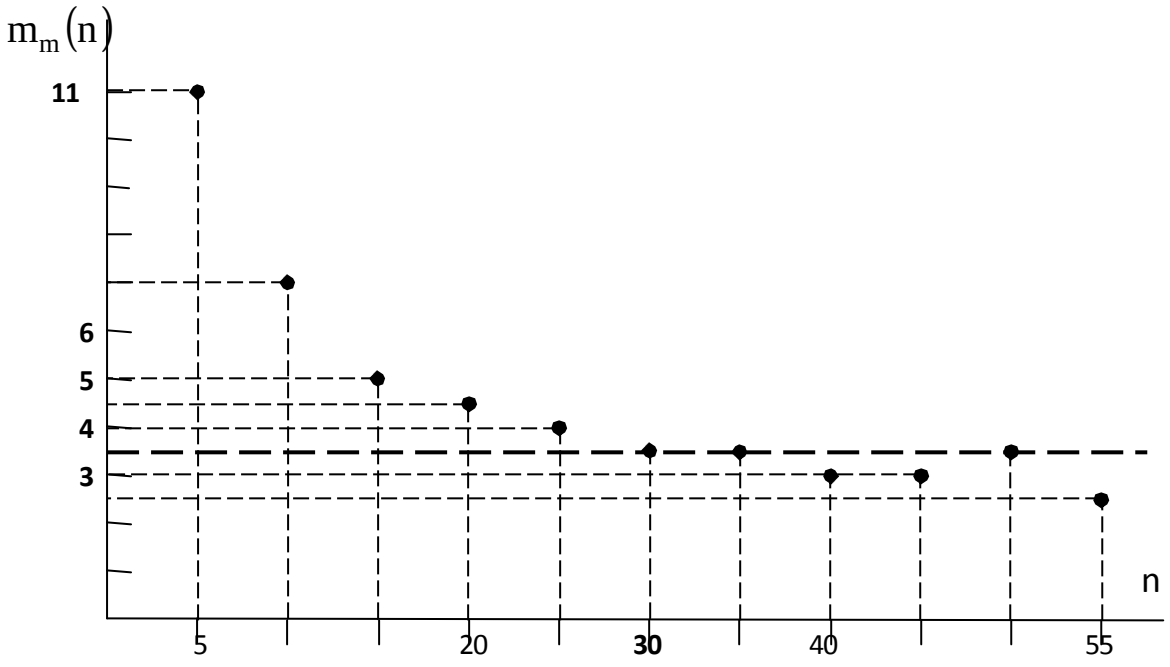


Рис. 3.5 - Ілюстрація залежності m_m від n

Приклад 3.2.

Оцінимо точність кутових вимірювань за нев'язкою трикутників, тобто за дійсниу похибок для $n=31$ трикутника тріангуляції 1 класу, які наведені в табл. 3.4.

У графічному вигляді нев'язка вимірювань, відповідна до значень табл. 3.4 ілюструються рис. 3.6, де в нижній частині рисунка показані абсолютні значення нев'язки (без урахування їх знаку). Тут наочно представлений розподіл нев'язності за їх величинах, а також значення критеріїв оцінювання точності

кутових вимірювань за нев'язкою нев'язності трикутників – середнє квадратичне значення m і значення середньої нев'язки ν.

Таблиця 3.4 - Початкові дані для оцінювання точності кутових вимірювань за нев'язкою трикутників

№ тр.	Незв'язність	№ тр.	Незв'язка	№ тр.	Незв'язка	№ тр.	Незв'язка
1	- 0,34	9	- 1,99	17	- 0,67	25	+ 1,21
2	+ 0,74	10	+ 0,88	18	- 0,20	26	- 0,11
3	- 0,29	11	- 0,66	19	+ 1,00	27	+ 1,89
4	+ 0,69	12	- 0,40	20	- 1,46	28	- 1,37
5	+ 0,90	13	+ 0,08	21	- 0,35	29	+ 0,90
6	- 1,99	14	+ 0,82	22	- 1,44	30	+ 0,23
7	**+ 2,53**	15	- 1,18	23	+ 1,76	31	- 0,70
8	- 1,97	16	+ 2,15	24	+ 0,47		

Для обчислення середньоквадратичного значення нев'язки скористаємося формулою (3.6). Підставимо до цієї формули значення нев'язки Δ .

$$m = \pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\Delta_i^2}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}34^2 + 0{,}74^2 + \ldots + 0{,}23^2 + 0{,}70^2}{31}} \approx 1{,}2'' .$$

Середню нев'язку за формулою (3.12) або (3.13).

$$v = \frac{\lfloor |\Delta| \rfloor}{n} = \frac{31{,}37}{31} \approx 1{,}0'' \text{ або } \nu = 0{,}79 \cdot m = 0{,}95 \cdot 1{,}2 = 0{,}95'' .$$

Оцінимо граничну незв'язку, подвоївши середньоквадратичні значення нев'язки

$$\Delta_{пр} = 2 \cdot m = 2{,}4'' .$$

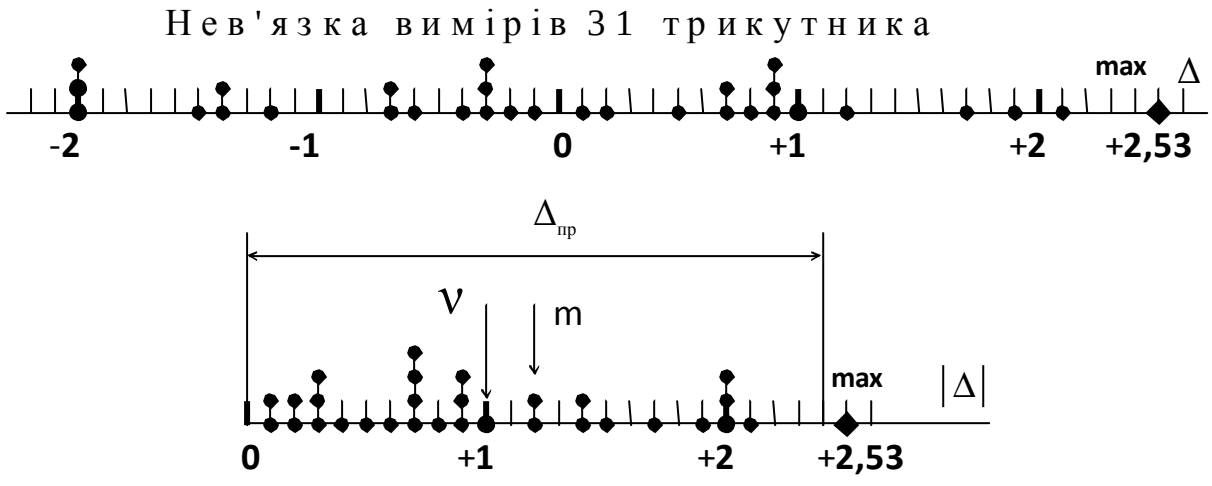


Рис. 3.6 - Графічна інтерпретація нев'язки вимірювань

Враховуючи властивість обмеженості випадкових похибок і прийняті в геодезії правила оцінювання з використанням граничної похибки $\Delta_{пр}$ можна побачити (див. рис. 3.6), що всі значення нев'язки, за винятком однієї нев'язки $\Delta = 2{,}53$, менші $\Delta_{пр} = 2{,}4$.

Крім того, властивість компенсації випадкових похибок дає можливість обчислити середнє значення нев'язки з урахуванням їх знаків

$$\frac{[\Delta]}{n} = \frac{(-0{,}34) + 0{,}74 + (-0{,}29) + \ldots + 0{,}23 + (0{,}70)}{31} = 0{,}036''.$$

Ці два факти дають підстави вважати, що кутові вимірювання, нев'язка яких представлена в табл.3.4 виконані з високою точністю.

Додаткові джерела інформації

1. Петров, Н.С. Основы теории ошибок измерений [Текст] учебное пособие / Н.С.Петров. – М.: Литература по горному делу. 1963. – 73 с.
2. Войславский, Л.К. Теория математической обработки геодезических измерений. Часть 1. Теория погрешностей измерений [Текст] учебно-методическое пособие (для студентов 2 курса дневной формы обучения спец. 7.070908 «Геоинформационные системы и технологии») / Л.К. Войславский. – Х.: ХНАГХ, 2006. – 64 с.

3. Зазуляк, П.М. Основи математичного опрацювання геодезичних вимірювань [Текст] навчальний посібник / П.М. Зазуляк, В.І. Гавриш, Е.М. Євсєєва, М.Д.Йосипчук. – Львів: Видавництво «Растр-7», 2007. – 408 с.

Змістовий модуль 4

Оцінка точності функцій безпосередньо виміряних величин

4.1. Основна теорема теорії похибок

У геодезичній практиці переважно використовуються не окремі безпосередньо зміряні величини, а їх функції, тобто непрямі вимірювання. Так, наприклад, нахил лінії визначають як відношення безпосередньо виміряного перевищення і довжини лінії. Довжина лінії, недоступної для безпосереднього вимірювання, обчислюється із розв'язання трикутника, у якого безпосередньо виміряні базисна сторона і горизонтальні кути. Площу земельної ділянки прямокутної форми обчислюють як добуток безпосередньо виміряних довжини і широти ділянки. Перелік подібних прикладів можна продовжувати. Звідси виникає *завдання оцінювання точності функції виміряних величин* за відомими стандартами σ або средньоквадратичними похибками m безпосередньо виміряних аргументів. Для розв'язання цього завдання доведена теорема.

Теорема 4.1. Якщо певна безперервна функція, що диференціюється за всіма аргументами

$$y = f\left(x_1, x_2, ..., x_t\right), \tag{4.1}$$

аргументи якої $x_1, x_2, \cdots, x_t$ - незалежні результати безпосередніх вимірювань певних величин $X_1, X_2, \cdots, X_t$, виконаних в умовах, що характеризуються стандартами $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_t$, то стандарт цієї функції буде дорівнювати

$$\sigma_y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 \cdot \sigma_1^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 \cdot \sigma_2^2 + \cdots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_t}\right)^2 \cdot \sigma_t^2}, \tag{4.2}$$

де - $\dfrac{\partial y}{\partial x_i}$ приватні похідні функції (4.1) за змінними $x_1, x_2, \cdots, x_t$, $i = \overline{1, t}$

Доказ. З курсу математичного аналізу відомо, що повний диференціал функції (4.1) дорівнює

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial y}{\partial x_t} dx_t . \qquad (4.3)$$

Припустимо, що величини $x_1, x_2, \cdots, x_t$ виміряні n разів. При цьому результати вимірювань містять випадкові похибки, які позначимо:

$$\Delta_1', \Delta_2', ..., \Delta_t'; \ \Delta_1'', \Delta_2'', ..., \Delta_t''; . \ \Delta_1^{(n)}, \Delta_2^{(n)}, ..., \Delta_t^{(n)} .$$

Наочно в графічній формі величини вимірювань і їх похибки, ілюструються рис. 4.1.

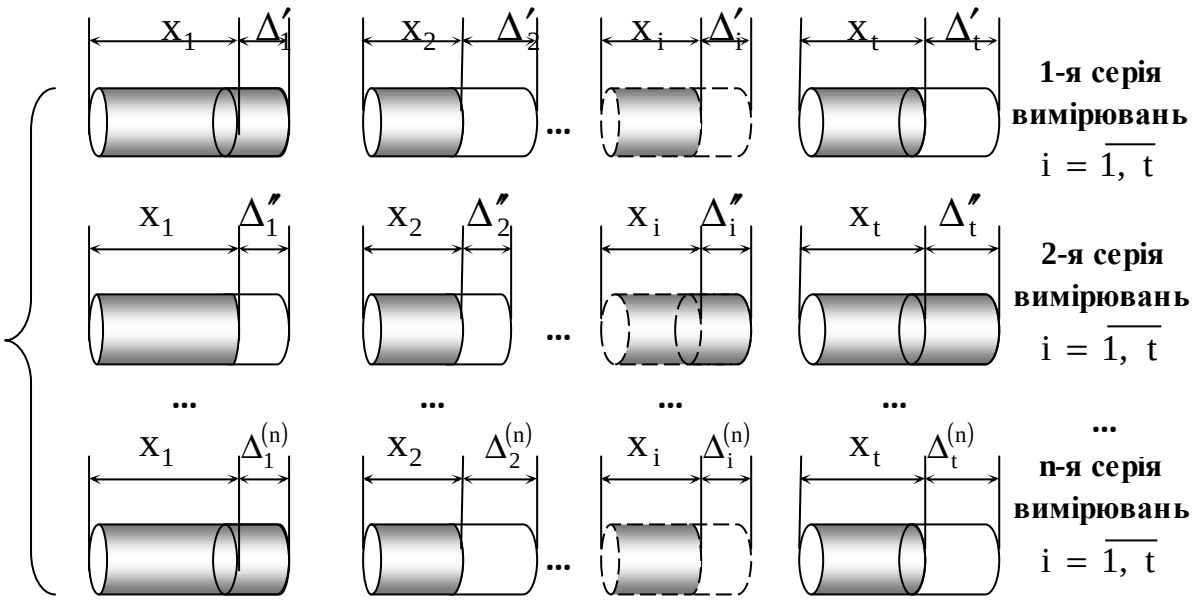


Рис. 4.1 - Графічна інтерпретація величин вимірювань і їх похибок

Вважаючи, що похибки Δ_i є приростами величин x_i (малими величинами), то на підставі запису повного диференціала (4.3) можна записати систему рівнянь у частинних похідних, де кожне з рівнянь характеризує зміну похибок у серії вимірювань величин $x_1, x_2, \cdots, x_t$

$$\Delta' y = \frac{\partial y}{\partial x_1}\Delta_1' + \frac{\partial y}{\partial x_2}\Delta_2' + \cdots + \frac{\partial y}{\partial x_i}\Delta_i' + \cdots + \frac{\partial y}{\partial x_t}\Delta_t',$$

$$\Delta'' y = \frac{\partial y}{\partial x_1}\Delta_1'' + \frac{\partial y}{\partial x_2}\Delta_2'' + \cdots + \frac{\partial y}{\partial x_i}\Delta_i'' + \cdots + \frac{\partial y}{\partial x_t}\Delta_t'',$$

$$\ldots \tag{4.4}$$

$$\Delta^{(n)} y = \frac{\partial y}{\partial x_1}\Delta_1^{(n)} + \frac{\partial y}{\partial x_2}\Delta_2^{(n)} + \cdots + \frac{\partial y}{\partial x_i}\Delta_i^{(n)} + \cdots + \frac{\partial y}{\partial x_t}\Delta_t^{(n)}.$$

Відзначимо, що кожен елемент $\frac{\partial y}{\partial x_i}\Delta_i'$, $\frac{\partial y}{\partial x_i}\Delta_i''$,..., $\frac{\partial y}{\partial x_i}\Delta_i^{(n)}$, $i = \overline{1,t}$ системи рівнянь має константу $\frac{\partial y}{\partial x_i} = \text{const}$. Для того, щоб оценити точно оцінити функції вимірюваніх величин $y = f(x_1, x_2, ..., x_t)$ з використанням стандарту σ або середньоквадратичної похибки m (див. формулу 2.14 і 3.6) необхідно здійснити наступні перетворення з системой рівнянь (4.4). Возвести в квадрат праві та леві частини кожного з рівнянь. Отримаємо

$$(\Delta' y)^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 (\Delta_1')^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 (\Delta_2')^2 + \cdots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 (\Delta_i')^2 + \cdots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_t}\right)^2 (\Delta_t')^2,$$

$$(\Delta'' y)^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 (\Delta_1'')^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 (\Delta_2'')^2 + \cdots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 (\Delta_i'')^2 + \cdots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_t}\right)^2 (\Delta_t'')^2,$$

$$\ldots \tag{4.5}$$

$$\left(\Delta^{(n)} y\right)^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 \left(\Delta_1^{(n)}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 \left(\Delta_2^{(n)}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 \left(\Delta_i^{(n)}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_t}\right)^2 \left(\Delta_t^{(n)}\right)^2.$$

Тепер кожне з рівнянь є сумою квадратів. Для того, щоб привести праві частини рівнянь до вигляду відомих формул скороченого множення многочленів $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ додамо до кожного рівняння суми добутків, що складаються з двох пар у кожному многочлені. Отримаємо

$$(\Delta' y)^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 (\Delta_1')^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 (\Delta_2')^2 + \cdots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 (\Delta_i')^2 + \cdots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_t}\right)^2 (\Delta_t')^2 +$$

$$+\,2\sum\frac{\partial y}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial y}{\partial x_2}\cdot\Delta_1'\cdot\Delta_2'+2\sum\frac{\partial y}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial y}{\partial x_3}\cdot\Delta_1'\cdot\Delta_3'+\cdots+2\sum\frac{\partial y}{\partial x_{t-1}}\cdot\frac{\partial y}{\partial x_t}\Delta_{t-1}'\cdot\Delta_t';$$

$$(\Delta''\mathrm{y})^2=\left(\frac{\partial \mathrm{y}}{\partial \mathrm{x}_1}\right)^2(\Delta_1'')^2+\left(\frac{\partial \mathrm{y}}{\partial \mathrm{x}_2}\right)^2(\Delta_2'')^2+\cdots+\left(\frac{\partial \mathrm{y}}{\partial \mathrm{x}_\mathrm{i}}\right)^2(\Delta_\mathrm{i}'')^2+\cdots+\left(\frac{\partial \mathrm{y}}{\partial \mathrm{x}_\mathrm{t}}\right)^2(\Delta_\mathrm{t}'')^2+$$

$$+\,2\sum\frac{\partial y}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial y}{\partial x_2}\cdot\Delta_1''\cdot\Delta_2''+2\sum\frac{\partial y}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial y}{\partial x_3}\cdot\Delta_1''\cdot\Delta_3''+\cdots+2\sum\frac{\partial y}{\partial x_{t-1}}\cdot\frac{\partial y}{\partial x_t}\Delta_{t-1}''\cdot\Delta_t'';$$

$$\ldots \tag{4.6}$$

$$\left(\Delta^{(\mathrm{n})}\mathrm{y}\right)^2=\left(\frac{\partial \mathrm{y}}{\partial \mathrm{x}_1}\right)^2\left(\Delta_1^{(\mathrm{n})}\right)^2+\left(\frac{\partial \mathrm{y}}{\partial \mathrm{x}_2}\right)^2\left(\Delta_2^{(n)}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial \mathrm{y}}{\partial \mathrm{x}_\mathrm{i}}\right)^2\left(\Delta_\mathrm{i}^{(\mathrm{n})}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial \mathrm{y}}{\partial \mathrm{x}_\mathrm{t}}\right)^2\left(\Delta_\mathrm{t}^{(\mathrm{n})}\right)^2+$$

$$+\,2\sum\frac{\partial y}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial y}{\partial x_2}\cdot\Delta_1^{(n)}\cdot\Delta_2^{(n)}+2\sum\frac{\partial y}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial y}{\partial x_3}\cdot\Delta_1^{(n)}\cdot\Delta_3^{(n)}+\cdots+2\sum\frac{\partial y}{\partial x_{t-1}}\cdot\frac{\partial y}{\partial x_t}\Delta_{t-1}^{(n)}\cdot\Delta_t^{(n)}.$$

Підсумуємо змінні лівої і правої частини отриманих многочленів і запишемо їх в символах Гаусса К.Ф.

$$[\Delta^2\mathrm{y}]=(\Delta'\mathrm{y})^2+(\Delta''\mathrm{y})^2+\cdots+(\Delta^{\mathrm{j}}\mathrm{y})^2+\cdots+(\Delta^{(\mathrm{n})}\mathrm{y})^2\ ,\ \mathrm{j}=\overline{1,\mathrm{n}};$$

$$[\Delta_1^2]=(\Delta_1')^2+(\Delta_1'')^2+\cdots+(\Delta_1^{\mathrm{j}})^2+\cdots+(\Delta_1^{(\mathrm{n})})^2;$$

$$[\Delta_2^2]=(\Delta_2')^2+(\Delta_2'')^2+\cdots+(\Delta_2^{\mathrm{j}})^2+\cdots+(\Delta_2^{(\mathrm{n})})^2;$$

$$\ldots \tag{4.7}$$

$$[\Delta_t^2]=(\Delta_t')^2+(\Delta_t'')^2+\cdots+(\Delta_t^{j})^2+\cdots+(\Delta_t^{(n)})^2;$$

$$[\Delta_i\Delta_j]=\Delta_1'\cdot\Delta_2'+\Delta_1''\cdot\Delta_2''+\cdots+\Delta_1^{(n)}\Delta_2^{(n)};$$

$$[\Delta_{i+1}\Delta_{j+1}]=\Delta_1'\cdot\Delta_3'+\Delta_1''\cdot\Delta_3''+\cdots+\Delta_1^{(n)}\Delta_3^{(n)};$$

$$\ldots$$

$$[\Delta_{t-1}\Delta_t]=\Delta_{t-1}'\cdot\Delta_t'+\Delta_{t-1}''\cdot\Delta_t''+\cdots+\Delta_{t-1}^{(n)}\cdot\Delta_t^{(n)}.$$

Розділимо отримані суми на n і запишемо остаточний вираз, що враховує всі змінні (погрішності Δ_i) системи рівнянь (4.4)

$$\frac{[\Delta^2 y]}{n}=\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2\frac{[\Delta_1^2]}{n}+\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2\frac{[\Delta_2^2]}{n}+\cdots+\left(\frac{\partial y}{\partial x_t}\right)^2\frac{[\Delta_t^2]}{n}+2\sum\frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial y}{\partial x_2}\cdot\frac{[\Delta_i\Delta_j]}{n}+$$

$$+\,2\sum\frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial y}{\partial x_3}\cdot\frac{[\Delta_{i+1}\Delta_{j+1}]}{n}+\cdots+2\sum\frac{\partial y}{\partial x_{t-1}}\frac{\partial y}{\partial x_t}\cdot\frac{[\Delta_{t-1}\Delta_t]}{n}. \tag{4.8}$$

Припускаючи, що $n \to \infty$, знайдемо межі лівої і правої частини отриманого виразу. На основі властивості незалежності (1.12) маємо наступне:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\lfloor \Delta_i \Delta_j \rfloor}{n} = 0 . \tag{4.9}$$

Враховуючи властивість розсіяння (1.12) для правої і лівої частини рівняння (4.8) справедливо записати

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\lfloor \Delta^2 y \rfloor}{n} = \sigma_y^2, \tag{4.10}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\lfloor \Delta_i^2 \rfloor}{n} = \sigma_i^2, \quad i = \overline{1, t} . \tag{4.11}$$

Спростимо вираз (4.8), відкинувши подвійні суми $2\sum \frac{\partial y}{\partial x_1} \frac{\partial y}{\partial x_2} \cdot \frac{\lfloor \Delta_i \Delta_j \rfloor}{n}$, оскільки вираз (4.9) їх перетворює на нуль, і, застосовуючи до його лівої частини граничне значення формули (4.10), а до правої частини - граничні значення формули (4.11) і добувши з них квадратний корінь, отримаємо вираз (4.2), що і потрібно було довести.

4.2. Застосування основної теореми для розрахунку гранично припустимої нев'язки

Розрахунок припустимої кутової нев'язки теодолитного ходу

Вважатимемо, що всі кути теодолітного ходу виміряні з класом точності технічного теодоліта в умовах, що характеризуються стандартом $\sigma_\beta = 30''$ і є равноточными. Відомо, що кутова нев'язка обчислюється за формулою

$$f_\beta = \sum \beta_{изм} - \sum \beta_{теор} = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_i + \cdots + \beta_n - \sum \beta_{теор}, \; i = \overline{1,n}, \tag{4.12}$$

де $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ - незалежні змінні величини; $\sum \beta_{теор}$ - для цього ходу є величиною постійною.

Знайдемо частинні похідні функції (4.12) за змінними β_i:

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial \beta_1} = \frac{\partial f_\beta}{\partial \beta_2} = \cdots = \frac{\partial f_\beta}{\partial \beta_n} = 1. \tag{4.13}$$

Скористаємося формулою (4.2), що характеризує стандарт цієї функції, і, враховуючи отриману формулу (4.13), а також враховуючи обмеження, що усі вимірювання рівно точні, можна записати

$$\sigma_{f_\beta} = \sigma_\beta \sqrt{\underbrace{1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2}_{\text{n слагаемых}}} = \sigma_\beta \sqrt{n} = 30'' \sqrt{n}.$$

Для розрахунку граничної нев'язки скористаємося виразом (3.10). Тоді для нашого випадку, де $\sigma_\beta = 30''$ припустима кутова нев'язка теодолітного ходу розраховується за формулою:

$$f_{\beta_{пр}} = 2\sigma_{f_\beta} = 1'\sqrt{n}. \qquad (4.14)$$

Розрахунок припустимої кутової нев'язки нівелірного ходу

Припустимо, що нівелірний хід довжиною L км. прокладений на рівнинній місцевості, де на кожний кілометр ходу припадає приблизно однакова кількість станцій за середньої відстані $\bar{l}$ між рейками на одній станції. Риска над буквою l позначає середнє значення відстані. Отже, кількість усіх станцій, які припадають на довжину ходу буде близьким до величини

$$n \approx \frac{L}{\bar{l}}. \qquad (4.15)$$

Крім того, вимірювання на станції вважатимемо за равноточні виконані в умовах, що характеризуються стандартом $\sigma_{ст}$.

Нев'язки нівелірного ходу розраховують за формулою

$$f_h = \sum h_{изм} - \sum h_{теор} = h_1 + h_2 + \cdots + h_i + \cdots + h_n - \sum h_{теор},\ i=\overline{1,n}, \qquad (4.16)$$

де $h_1, h_2, ..., h_n$ як і у виразі (4.12) незалежні змінні $\sum h_{теор}$ - постійна величина.

Знаходимо частинні похідні функції (4.16) за змінними h_i

$$\frac{\partial f_h}{\partial h_1} = \frac{\partial f_h}{\partial h_2} = \cdots = \frac{\partial f_h}{\partial h_n} = 1 \cdot \tag{4.17}$$

За аналогією з розрахунком припустимої кутової нев'язки теодолитного ходу для розрахунку припустимої нев'язки нівелірного ходу запишемо

$$\sigma_{f_h} = \sigma_{ст}\sqrt{\underbrace{1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2}_{n\ слагаемых}} = \sigma_{ст}\sqrt{n}\,. \tag{4.18}$$

Для розрахунку граничної нев'язки нівелірного ходу скористаємося формулою (3.11). Тоді, враховуючи вираз (4.15), отримаємо

$$f_{h_{пр}} = 3\sigma_{f_h} = \frac{3\sigma_{ст}\sqrt{L}}{\sqrt{l}}\,. \tag{4.19}$$

Величини стандарту $\sigma_{ст}$ для кожного класу нівеляції встановлені нормативними документами, тобто є постійними. Спростимо формулу (4.19), ввівши наступне позначення

$$\eta = \frac{3\sigma_{ст}}{\sqrt{l}}$$

і підставимо його у вираз (4.19), отримаємо відому з геодезії формулу

$$f_{h_{пр}} = \eta\sqrt{L}\,, \tag{4.20}$$

де η - коефіцієнт, залежний від класу нівеляції. Для IV класу $\eta = 20$ мм, для технічної нівеляції η=50мм.

4.3. Апостеріорна оцінка точності функцій виміряних величин

На практиці при апостеріорній оцінці точності функції $y = f(x_1, x_2, ..., x_t)$ виміряних величин $X_1, X_2, \cdots, X_t$ невідомі стандарти $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_t$ у формулі (4.2) замінюють средньоквадратичими похибками $m_1, m_2, ..., m_i, ..., m_t$. Тоді

$$m_y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 \cdot m_1^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 \cdot m_2^2 + \cdots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_t}\right)^2 \cdot m_t^2}\,. \tag{4.21}$$

Розрахунки виконуються в наступній послідовності:

1. Функцію (4.1) записують в явному вигляді;
2. Знаходять частинні похідні цієї функції за всіма незалежними змінними;
3. Підставляємо частинні похідні і середні квадратичні погрішності до формули (4.21);
4. Виконують необхідні математичні перетворення і отримують остаточний результат.

Приклад 4.1. За відомими результатами вимірювань, висотою нахилу $h_{AB} = 12{,}6$м і проекції лінії АВ $d_{AB} = 468$м і оцінками їх точності вимірювань (средньоквадратичними похибками) $m_h = 0{,}1$м і $m_d = 0{,}5$м відповідно, необхідно знайти средньоквадратичну похибку нахилу лінії АВ, схематично зображеного на рис. 4.2.

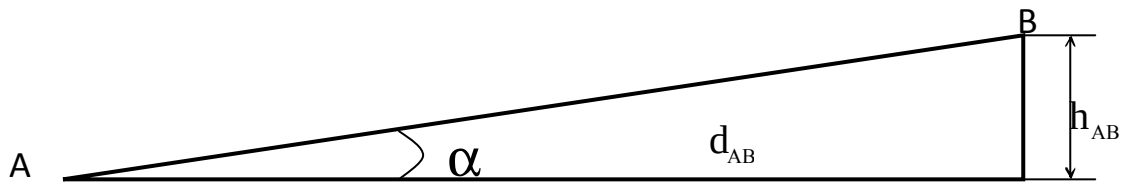


Рис. 4.2 - Графічна інтерпретація нахилу

Рішення. Використовуючи рекомендовану послідовність оцінювання точності виміряних величин, задамо в явному вигляді функцію вимірювання нахилу відому з геодезії $i = \mathrm{tg}\,\alpha$, де $i = \frac{h_{AB}}{d_{AB}}$. Підставляючи до формули задані чисельні значення, отримаємо $i = \frac{12{,}6}{468} = 0{,}027$.

Другим кроком у розв'язанні поставленої задачі є знаходження частинних похідних функції $i = \frac{h_{AB}}{d_{AB}}$ за змінними h_{AB} і d_{AB}. Продиференціюємо цю функ-

цію спочатку за змінною h_{AB}, зафіксувавши змінну d_{AB}, отримаємо $\frac{\partial i}{\partial h_{AB}} = \frac{1}{d}$,

а після того за змінною d_{AB}, зафіксувавши h_{AB},

$$\frac{\partial i}{\partial d_{AB}} = -\frac{h_{AB}}{d_{AB}^2} = -\frac{i}{d_{AB}}.$$

На третьому кроці розв'язання поставленої задачі скористаємося формулою (4.21), перетворюючи її на формулу для обчислення середньоквадратичної похибки нахилу. Формула (4.21) набере наступного вигляду:

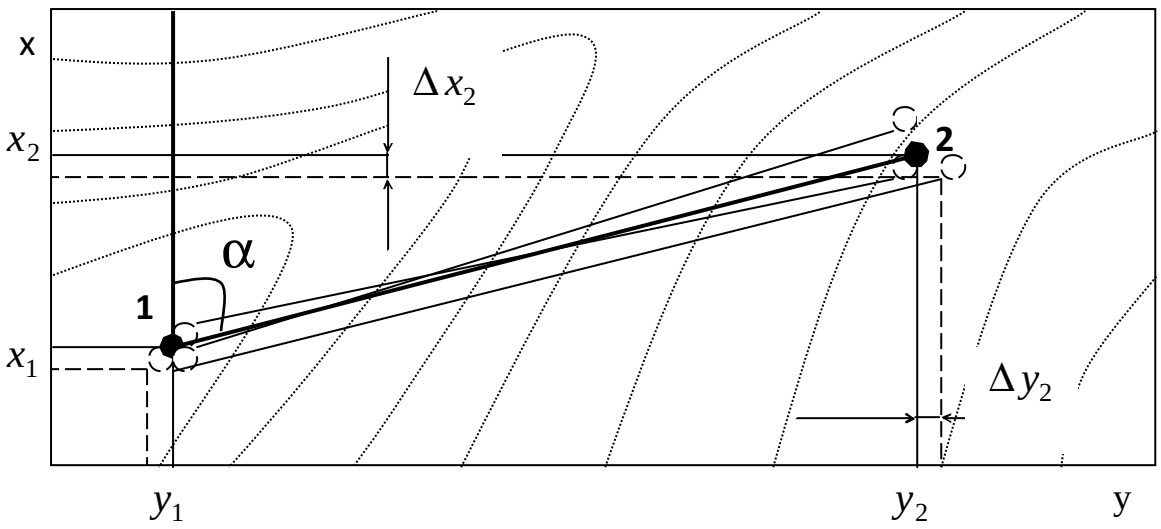
$$m_i = \sqrt{\frac{1}{d^2} m_h^2 + \frac{i^2}{d^2} m_d^2}.$$

На четвертому кроці розв'язання задачі до отриманої формули підставимо чисельні значення і зробимо відповідні обчислення, отримаємо $m_i \approx 0{,}0002$.

Таким чином, завдання знаходження средньоквадратичної похибки нахилу за заданими апостеріорними оцінками розв'язане. Мала величина m_i свідчить про точне вимірювання нахилу заданої лінії.

Приклад 4.2. На топографічній карті виміряні прямокутні координати x і y крапок 1 і 2 (див. рис.4.3). Средньоквадратичні похибки визначення координат точоу дорівнюють $m_{x_1} = m_{x_2} = m_{y_1} = m_{y_2} = \overline{m}$. За координатами обчислені довжини d і кут дирекції α лінії 1-2.

Необхідно визначити средньоквадратичні похибки m_d і m_α.



$\Delta x_2, \Delta y_2$ - похибка одного вимірювання координат точки 2

Рис. 4.3 - Графічна інтерпретація багатократного вимірювання координат двох точок

Розв'язання. З умов завдання видно, що обчислення довжини лінії d залежить від результатів вимірювання координат крапок 1 і 2. Отже, змінними в цьому випадку є координати точок 1 (x_1, y_1) та 2 (x_2, y_2),

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ .$$

Візьмемо частинні похідні від d за змінними x_1 x_2

$$\frac{\partial d}{\partial x_1} = -\frac{2(x_2 - x_1)}{2\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} = -\frac{x_2 - x_1}{d} = -\cos\alpha; \quad \frac{\partial d}{\partial x_2} = \cos\ \alpha;$$

$$\frac{\partial d}{\partial y_1} = -\frac{2(y_2 - y_1)}{2\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} = -\frac{y_2 - y_1}{d} = -\sin\alpha; \quad \frac{\partial d}{\partial y_2} = \sin\ \alpha\ .$$

Перетворимо вираз (4.21) з урахуванням результатів диференціювання і рівності середньоквадратичних похибок, заданих в умові завдання запишемо

$$m_d = \sqrt{(-\cos\alpha)^2 \cdot (\overline{m})^2 + (\cos\alpha)^2 \cdot (\overline{m})^2 + (-\sin\alpha)^2 \cdot (\overline{m})^2 + (\sin\alpha)^2 \cdot (\overline{m})^2}\ .$$

Перетворимо отриманий вираз і винесемо $\overline{m}$ за знак радикала

$$m_d = \overline{m}\sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha + \sin^2\alpha}\ .$$

Спростимо підкорінний вираз, використовуючи відому тригонометричну формулу $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$. Тоді $m_d=\overline{m}\sqrt{2}$. Отримана формула для обчислення средньоквадратичної похибки вимірювання m_d довжини лінії d.

Для обчислення средньоквадратичної похибки m_α скористаємося тригонометричною функцією, яка пов'язує кут дирекції із результатами вимірювань координат точок 1 і 2. Така функція очевидна (див. рис.4.3) і має наступний вигляд:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

Для зручності подальших перетворень прологарифмуємо отриману функцію:

$$\ln\operatorname{tg}\alpha=\ln(y_2-y_1)-\ln(x_2-x_1).$$

Обчислимо похідну лівої частини, отриманого рівняння:

$$(\ln\operatorname{tg}\alpha)'=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha\cdot\cos^2\alpha}=\frac{1}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}.$$

Знайдемо частинні похідні від α за змінними x_1, x_2

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x_1}=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{x_2-x_1}=\frac{\sin\alpha}{d};\quad \frac{\partial\alpha}{\partial x_2}=-\frac{\sin\alpha}{d};$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial y_1}=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{y_2-y_1}=-\frac{\cos\alpha}{d};\quad \frac{\partial\alpha}{\partial y_2}=\frac{\cos\alpha}{d}.$$

Проводячи перетворення з використанням формули (4.21) і спрощення аналогічні попередньому прикладу, отримаємо

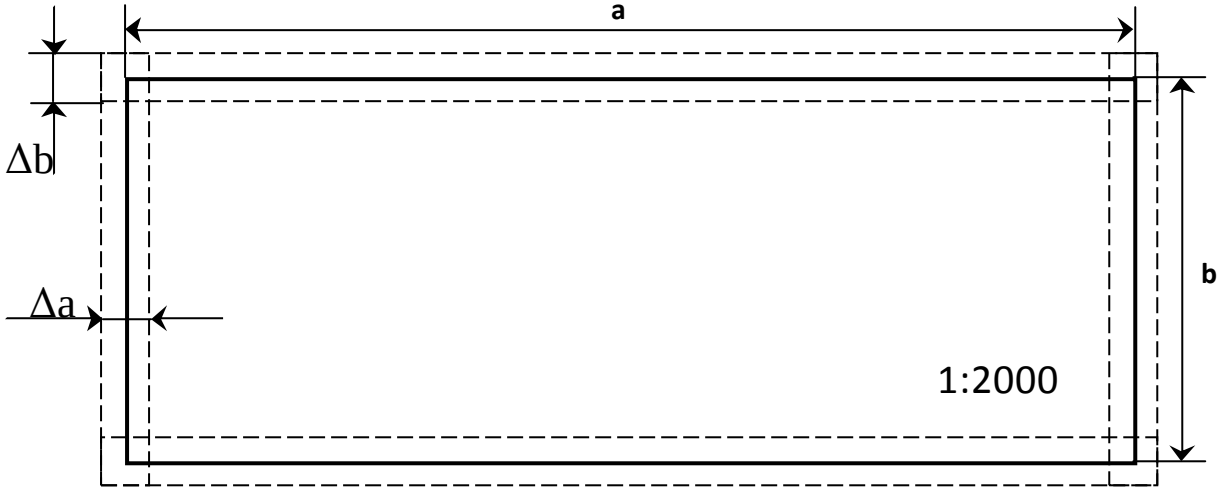
$$m_\alpha=\frac{m}{d}\rho\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{m\sqrt{2}}{d}\rho.$$

Тут ρ - коефіцієнт переходу від міри радіану до градусного вимірювання $\rho=3438$ (кількість хвилин в одному радіані).

Таким чином, отримано дві прості формули за допомогою, яких можна обчислити значення средньоквадратичної похибки m_d вимірювання довжини лінії d, а також значення средньоквадратичної похибки m_α кута дирекції α.

Причому похибка кута дирекції, обчисленого за координатами, обернено пропорційна довжині лінії.

Приклад 4.3. Виміряні довжина $à = 59{,}85ì$ і $b = 20{,}10ì$ земельної ділянки прямокутної форми з средньоквадратичною відносною похибкою 1:2000. (див. рис. 4.4).



Δa, Δb - похибки вимірювання сторін **a** і **b**, які зумовлюють обчислення

Рис. 4.4 - Геометрична інтерпретація умов розв'язання задачі

Необхідно знайти площу ділянки і середньоквадратичну відносну похибку визначення площі.

Розв'язання. Запишемо формулу обчислення площі земельної ділянки і обчислимо її за відомими даними.

$$F = a \cdot b = 1203 \text{ м}^2.$$

З рис. 4.4 видно, що зміряні величини **a** і **b** є змінними і від точності їх вимірювання залежить точність обчислення земельної ділянки.

З метою спрощення обчислень прологарифмуємо отриманий вираз $\ln F = \ln a + \ln b$ і знайдемо повний диференціал функції

$$\frac{dF}{F} = \frac{da}{a} + \frac{db}{b}.$$

Замінивши в отриманому виразі диференціали середньоквадратичними похибками, враховуючи формулу (4.21) отримаємо

$$\frac{m_F}{F} = \sqrt{\frac{m_a^2}{a^2} + \frac{m_b^2}{b^2}}.$$

За умовами завдання

$$\frac{m_a}{a} = \frac{m_b}{b} = \frac{1}{2000}.$$

Підставимо отримане значення до формулу обчислення середньоквадратичної похибки, і знайдемо

$$\frac{m_F}{F} = \sqrt{\left(\frac{1}{2000}\right)^2 + \left(\frac{1}{2000}\right)^2} = \frac{1}{2000}\sqrt{2} = \frac{1}{1414}.$$

За необхідності у процесі аналізу точності вимірювань можна перейти до абсолютних похибок

$$m_F = \frac{1}{1414}F = \frac{1}{1414}a \cdot b = \frac{1203}{1414} \approx 0{,}9\,м^2.$$

Таким чином, знайдена площа земельної ділянки і показники точності проведених вимірювань (середньоквадратичні похибки вимірювань). Отримані показники можуть бути покращувані за рахунок вимірювання ділянки землі точнішими приладами, а також збільшенням кількості вимірювань.

Розглянуті вище приклади приведуть до поняття «Надійність апостеріорної оцінки точності вимірювань». Оцінка такої надійності пов'язана з певними труднощами, які зумовлені застосуванням спеціальної технології вимірювань і використанні основної теореми теорії похибок. Технологія передбачає вимірювання кожної незалежної змінної декількома серіями і для кожної серії обчислення средньоквадратичної похибки $m_1, m_2, ..., m_i, ..., m_t$ а потім обчислення средньоквадратичної похибки всіх серій вимірювань. Продиференціюємо функцію (4.21) за змінними $m_i, i = \overline{1,t}$. У результаті отримаємо

$$m_{m_y} = \frac{1}{m_y}\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^4 m_1^2 \cdot m_{m_1}^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^4 m_2^2 \cdot m_{m_2}^2 + \cdots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_t}\right)^4 m_t^2 \cdot m_{m_t}^2}\ . \qquad (4.22)$$

Використовуючи раніш отриманий вираз (3.14) $m_{m_i} = \frac{m_i}{\sqrt{2n}}$, підставимо його до виразу (4.22). Отримаємо залежність величини m_{m_y} від кількості вимірювань

$$m_{m_y} = \frac{1}{m_y}\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^4 \frac{m_1^4}{2n_1} + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^4 \frac{m_2^4}{2n_2} + \cdots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_t}\right)^4 \frac{m_t^4}{2n_t}}, \qquad (4.23)$$

де n_i $i = \overline{1, t}$ - кількість вимірювань в і-ій серії вимірювань.

Таким чином, очевидно, що підвищення надійності апостеріорної оцінки точності вимірювань, пов'язано з додатковими трудовими витратами з серійного вимірювання кожного параметра (незалежною змінною).

Додаткові джерела інформації

1. Бурмистров, Г.А. Теория математической обработки геодезических измерений [Текст]: пособие / Г.А. Бурмистров, В.Д. Большаков. – М.: Недра, 1969. – 400 с.
2. Войславский, Л.К. Теория математической обработки геодезических измерений. Часть 1. Теория погрешностей измерений [Текст] учебно-методическое пособие (для студентов 2 курса дневной формы обучения спец. 7.070908 «Геоинформационные системы и технологии») / Л.К. Войславский. – Х.: ХНАГХ, 2006. – 64 с.
3. Зазуляк, П.М. Основи математичного опрацювання геодезичних вимірювань [Текст] навчальний посібник / П.М. Зазуляк, В.І. Гавриш, Е.М. Євсєєва, М.Д. Йосипчук. – Львів: Видавництво «Растр-7», 2007. – 408 с.

Змістовий модуль 5

Математична ооробка ряду рівноточних результатів вимірювань однієї і тієї ж величини

5.1. Просте арифметичне серединє і його властивості

Якщо $l_i, i=\overline{1,n}$ - ряд незалежних результатів рівноточних вимірювань однієї і тієї ж величини X, то за якнайкраще наближення до її дійсного значення зазвичай приймають просте арифметичне серединє, яке обчислюється за елементарною формулою

$$L=\frac{[l]}{n}, \tag{5.1}$$

де n – кількість рівноточних вимірювань, а квадратні дужки означають суму результатів вимірювань у символах К.Ф.Гаусса.

Такі обчислення є правомірними, тому що за них враховують властивості арифметичного середнього, які розглянемо нижче.

Властивості простого арифметичного середнього

Властивість 1. Якщо результати вимірювань вільні від систематичних похибок, то просте арифметичне серединє цих результатів при збільшенні кількості вимірювань в границє наближається до дійсного значення вимірюваної величини, тобто

$$\lim_{n\to\infty}(L-X)=0\cdot \tag{5.2}$$

Враховуючи властивості систематичних похибок можна записати

$$\Delta_1=l_1-X;\ \Delta_2=l_2-X;\ldots;\ \Delta_n=l_n-X.$$

Використовуючи результати доведення основної теореми теорії похибок, підсумуємо праві і ліві частини отриманих виразів і розділимо їх на n (див. доведення теореми в п.п. 4.1). Отримаємо

$$\frac{[\Delta]}{n}=\frac{[l]}{n}-X.$$

Використовуючи вираз (5.1), очевидно, що отриману рівність можна записати у вигляді

$$\frac{[\Delta]}{n} = L - X.$$

За $n \to \infty$ ліва частина цього виразу на підставі властивості компенсації випадкових похибок (2.11) наближається до нуля. Права його частина так само наближається до нуля, що доводить справедливість виразу (5.2).

Отже, просте арифметичне серединє L є спроможним оцінити величину X.

Властивість 2. Арифметичне серединє незалежних рівноточних результатів вимірювань має стандарт в $\sqrt{n}$ раз менший стандарту σ цих вимірювань.

Представимо вираз (5.1) у вигляді

$$L = \frac{l_1}{n} + \frac{l_2}{n} + \cdots \frac{l_i}{n} + \cdots + \frac{l_n}{n},\ i = \overline{1, n}.$$

Скориставшись процедурами доведення основної теореми теорії погрішностей в отриманому виразі, візьмемо частинні похідні за кожною змінною l_i

$$\frac{\partial L}{\partial l_i} = \frac{1}{n},$$

тоді формула (4.2) набуває вигляду:

$$\sigma_L = \sqrt{\frac{1}{n^2}\sigma^2 + \frac{1}{n^2}\sigma^2 + \cdots + \frac{1}{n^2}\sigma^2} = \sigma\sqrt{\frac{n}{n^2}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \qquad (5.3)$$

Наочно, арифметичне серединє рівноточних результатів вимірювань можна представити, зобразивши графічно (див. рис. 5.1) ділянки розсіювання похибок Δ і Δ_L.

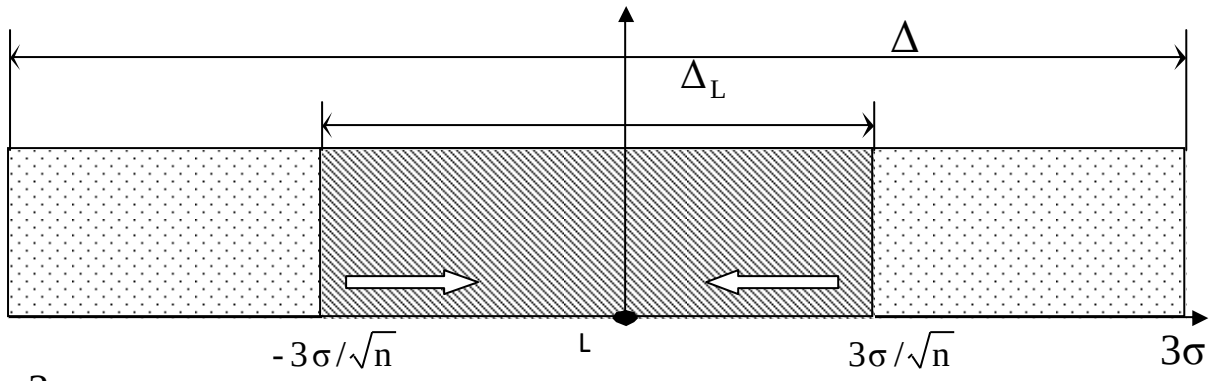


Рис. 5.1 - Ілюстрація розподілу похибок відносно арифметичної середньої рівноточних вимірювань

Ділянка можливого розсіювання похибок Δ_L буде тим вужча, чим більша кількість вимірювань n. У зв'язку з цим виникає питання, чи є збільшення кількості вимірювань ефективною процедурою підвищення їх точності? При $n \leq 10$ на це питання можна відповісти позитивно. Але за збільшенні кількості вимірювань n точність вимірювань змінюватиметься повільніше, ніж збільшення n. Так, для підвищення точності в 4 рази буде потрібно 16 вимірювань, в 5 разів – 25, в 6 разів – 36, у 10 разів – 100 вимірювань.

Крім того, завжди залишаються малі похибки порівняно з випадковими систематичними похибками, які не вдалося цілком виключити. Досягши деякого n вони стають переважаючими у величині L і перешкоджатимуть подальшому підвищенню точності. Таким чином, збільшення кількості вимірювань, з одного боку, збільшує точність вимірювань, з іншого боку, велика кількість вимірювань вимагає великих часових витрат, що може призвести до зміни умов і неминучого порушення рівноточних вимірювань.

Властивість 3. Якщо арифметичне серединє, отримане з результатів вимірювань вільних від систематичних погрішностей, то і саме воно не містить систематичної похибки.

Припустимо зворотне, тобто результати вимірювань містять систематичні похибки $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_i, ..., \theta_n$. Тоді на підставі (2.9) можна записати:

$$l_1 - X = \theta_1 + \Delta_1;\ l_2 - X = \theta_2 + \Delta_2;.;\ l_n - X = \theta_n + \Delta_n.$$

Склавши праві і ліві частини отриманих рівнянь між собою і розділивши їх на n, отримаємо

$$L - X = \frac{[\theta_i]}{n} + \frac{[\Delta_i]}{n},\ i = \overline{1,n}.$$

Права частина отриманого рівняння складається з двох частних що є систематичною і випадковою похибками арифметичного серединього. Звідси випливає, що якщо $\theta_1 = \theta_2 = ... = \theta_n = 0$, то і $\frac{[\theta]}{n}$ дорівнюватиме 0, що і доводить сформульовану вище властивість.

Таким чином, за відсутності систематичних похибок арифметичне серединє L є не тільки спроможнє, але і незміщенним оцінюванням величини X. Таку оцінку називають **найймовірнішим значенням** вимірюваної величини.

За наявності систематичних похибок арифметичне серединє також міститиме систематичну похибку

$$\theta_L = \frac{[\theta_i]}{n},$$

а тому не має властивостей 1 і 3. У цьому випадку арифметичне серединє L хоча і дасть якнайкраще з можливих наближень до X, але не буде її найймовірнішим значенням.

Раніше було відзначино, що вплив випадкових похибок можна ослабити належною математичною обробкою. Такого чину обробку називають **зрівнюванням результатів вимірювань.**

Результати вимірювань зрівнюються шляхом введення в дообчислення поправок. Під точною поправкою $\bar{v}$ розумітимемо величину, додавши яку до результатів вимірювання l отримаємо значення X, тобто

$$l + \bar{v} = X. \qquad (5.4)$$

Перетворимо отриманий вираз і представимо його у вигляді:

$$\bar{v} = -(l - X).$$

З отриманого співвідношення випливає, що точна поправка $\overline{\nu}$ за абсолютною величиною дорівнює похибці, але протилежна їй за знаком. Відзначемо, що знайти точні поправки у більшості випадків геодезичної практики не є можливим, тому доводиться використовувати наближені поправки. Під **наближеною поправкою** ν' розумітимемо величину, додавши яку до результату вимірювання l отримаємо деяке наближене значення y до X, тобто

$$l+\nu'=y. \tag{5.5}$$

Додавши наближену поправку до результату l_i отримаємо найймовірніші значення L, яке називається **найймовірнішою поправкою**, тобто

$$l_i+\nu'_i=L,\ i=\overline{1,n}. \tag{5.6}$$

Графічна інтерпретація розглянутих вище поправок ілюструється рис.5.2 і рис.5.3.

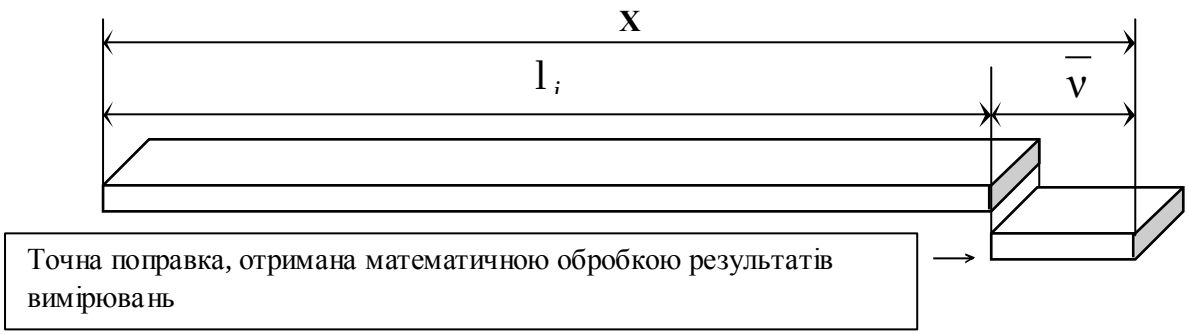


Рис. 5.2 - Ілюстрація зрівнювання результатів вимірювань точною поправкою

Наступні властивості (властивість 4 і 5) арифметичної середини пов'язані з найймовірнішими поправками.

Властивість 4. Якщо за ймовірніше значення вимірюваної величини прийнята арифметична середина, то сума найймовірніших поправок дорівнює нулю, тобто

$$[\nu]=0. \tag{5.7}$$

На підставі (5.6) запишемо наступну систему лінійних рівнянь

$$l_1 + \nu_1 = L;\ l_2 + \nu_2 = L;.;l_i + \nu_i = L;.;\ l_n + \nu_n = L\ \ i = \overline{1,n}$$

Отримані лінійні рівняння підсумуємо і запишемо їх, використовуючи символіку К.Ф. Гаусса

$$[l] + [\nu] = n \cdot L. \tag{5.9}$$

Порівнюючи рівняння (5.9) з перетвореним рівнянням простого арифметичного середнього (5.1), а саме $[l] = n \cdot L$ очевидно, що $[\nu] = 0$.

Властивість 5. Сума квадратів найймовірніших поправок, отриманих з арифметичного середнього, завжди менша суми квадратів наближених поправок, отриманих для будь-якої іншої функції тих же результатів вимірювань.

На підставі виразу (5.5) і рис.5.3 запишемо систему лінійних рівнянь.

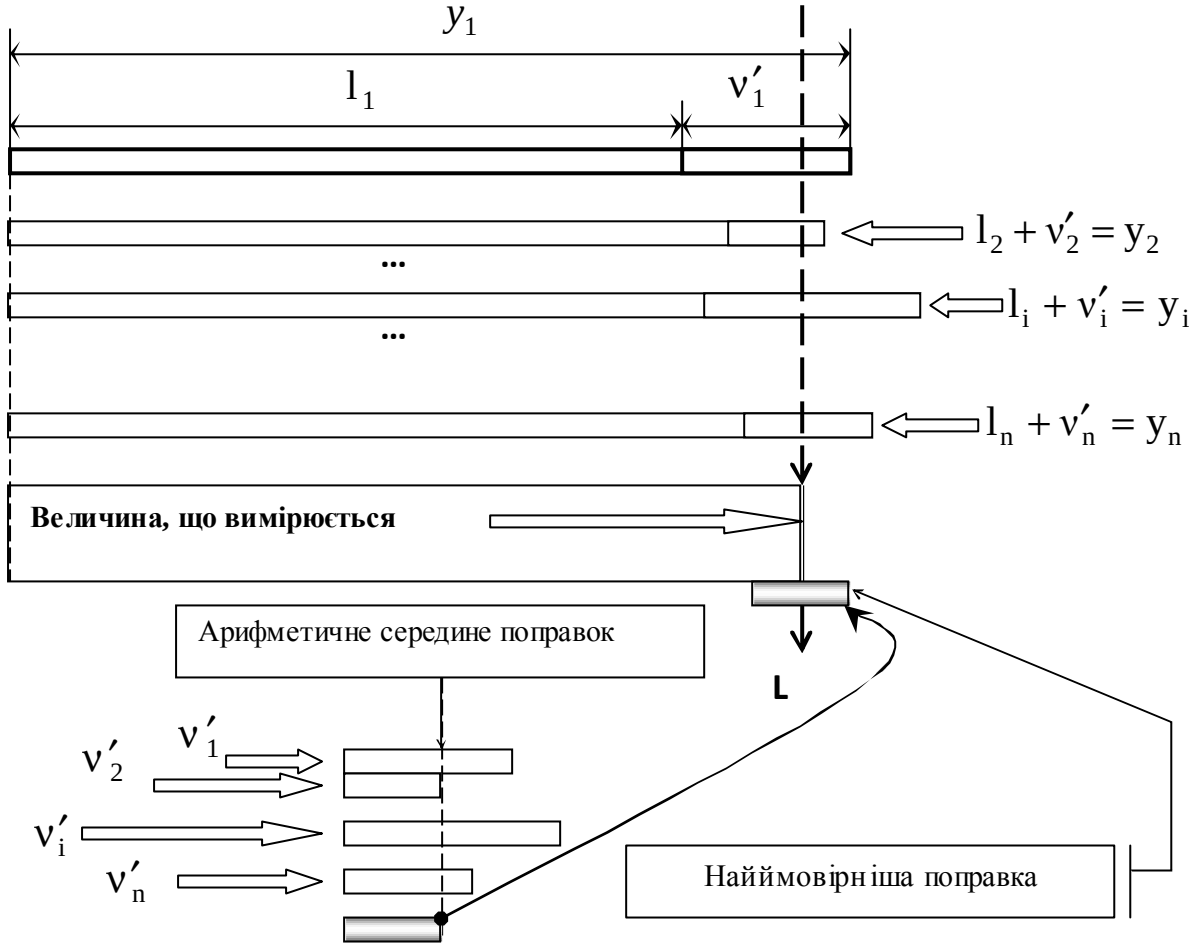


Рис. 5.3 - Ілюстрація вирівнювання результатів вимірювань найймовірнішою поправкою

$$l_1 + \nu'_1 = y;l_2 + \nu'_2 = y_2;.;l_i + \nu'_i = y;.;\ l_n + \nu'_n = y\ \ i = \overline{1,n}$$

Віднімемо від кожного рівняння отриманої системи лінійних рівнянь (5.10) рівняння системи (5.8) і, зробивши відповідні перетворення, отримаємо:

$$\nu_1' = \nu_1 + (y - L);\ \nu_2' = \nu_2 + (y - L);\ldots;\ \nu_n' = \nu_n + (y - L).$$

Піднесемо до квадрата праві і ліві частини отриманих рівнянь

$$(\nu_1')^2 = (\nu_1 + (y - L))^2;\ (\nu_2')^2 = (\nu_2 + (y - L))^2;\ ..;\ (\nu_n')^2 = (\nu_n + (y - L))^2.$$

Скориставшись формулами скороченого множення многочленів для квадратів, отримаємо

$$(\nu_1')^2 = (\nu_1)^2 + 2\nu_1 \cdot (y - L) + (y - L)^2;$$

$$(\nu_2')^2 = (\nu_2)^2 + 2\nu_2 \cdot (y - L) + (y - L)^2;$$

$$\ldots$$

$$(\nu_n')^2 = (\nu_n)^2 + 2\nu_n \cdot (y - L) + (y - L)^2.$$

Підсумуємо отримані вирази і запишемо їх в символах К.Ф.Гаусса

$$\left[(\nu_i')^2\right] = \left[\nu_i^2\right] + 2[\nu_i](y - L) + n(y - L)^2.$$

У правій частині отриманої рівності середній доданок дорівнює нулю внаслідок того, що $[\nu] = 0$ (див. формулу 5.7). Тому

$$\left[(\nu_i')^2\right] = \left[\nu_i^2\right] + n(y - L)^2. \qquad (5.11)$$

Звідси випливає нерівність $\left[(\nu_i')^2\right] > \left[\nu_i^2\right]$ або $\left[\nu_i^2\right] = \min$ яка і доводить сформульовану вище властивість.

Таким чином, розглянуті властивості простого арифметичного серединього є однією з основних характеристик оцінювання точності рівноточних геодезичних вимірювань. Знання властивостей простого арифметичного серединього дозволяє правильно організувати математичну обробку рівноточних геодезичних вимірювань.

5.2. Формула розрахунку емпіричної середньоквадратичної похибки

У п.3 розглянуті кількісні критерії і чисельні приклади апостеріорної оцінки точності ряду незалежних рівноточних вимірювань однієї величини за дійс-

ними похибками. Цей спосіб є, безумовно, ефективним тільки тоді, коли у процесі вимірювань поруч з результатами вимірювань отримують їх дійсні похибки. Проте у багатьох випадках геодезичної практики дійсні похибки залишаються невідомими. Тому виникає необхідність апостеріорної оцінки точності вимірювань за їх результатами.

Наведемо доказ теореми.

Теорема 5.1. Якщо $l_1, l_2, ..., l_n$ - результати незалежних рівноточных вимірювань, вільних від змінних систематичних похибок, то величина

$$m^2 = \frac{[\nu^2]}{n-1}, \tag{5.12}$$

де ν - найймовірніші поправки, є можливе і незміщене наближення до квадрата стандарту, тобто дисперсії σ^2 випадкових оцінок вимірюваної величини.

Результати вимірювань представимо у вигляді:

$$l_1 = X + \Delta_1 + \bar{\theta};\ l_2 = X + \Delta_2 + \bar{\theta};.;l_n = X + \Delta_n + \bar{\theta} \tag{5.13}$$

де $\bar{\theta}$ - постійна систематична похибка; Δ_i - випадкова похибка, X – дійсне значення вимірюваної величини.

Оскільки постійна систематична похибка враховується при обчисленні арифметичного середнього, то справедлива рівність

$$L = X + \Delta_L + \bar{\theta}, \tag{5.14}$$

де Δ_L дійсна випадкова погрішність арифметичноого середнього.

Віднімемо з отриманого виразу по черзі кожне із системи рівнянь (5.13) і, зважаючи на систему лінійних рівнянь (5.8) $L = l_i + \nu_i$, $i = \overline{1, n}$ отримаємонаступне: $\nu_1 = \Delta_L - \Delta_1$; $\nu_2 = \Delta_L - \Delta_2$; ...; $\nu_n = \Delta_L - \Delta_n$. Представимо ці вирази у наступному вигляді: $\Delta_1 = \Delta_L - \nu_1; \Delta_2 = \Delta_L - \nu_2; ...; \Delta_n = \Delta_L - \nu_n$.

Піднесемо, ліві і праві частини до квадрата, а результати підсумуємо наступним чином:

$$[\Delta^2] = n\Delta_L^2 - 2\Delta_L[\nu] + [\nu^2]\ .$$

Підставимо в отриманий вираз формулу (5.7), тобто $[\nu]=0$ отримаємо:

$$[\Delta^2] = n\Delta_L^2 + [\nu^2].$$

Перетворюючи цей вираз отримаємо: $[\nu^2]=[\Delta^2] - n\Delta_L^2$. У правій частині винесемо за дужку n і поділимо обидві частини рівняння на $n-1$. У результаті отримаємо

$$\frac{[\nu^2]}{n-1} = \frac{n}{n-1}\left\{\frac{[\Delta^2]}{n} - \Delta_L^2\right\}. \qquad (5.15)$$

Спочатку доведемо, що права частина отриманого виразу є дійсною оцінкою, тобто дисперсією. Для цього перейдемо до межі при $n \to \infty$. Скористаємося методами математичного аналізу, зокрема правилом Лопіталя, при розкритті невизначеності $\frac{\infty}{\infty}$ яке є складовою $\frac{n}{n-1}$ правої частини рівняння (5.15), перетворює на одиницю

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n-1}=1.$$

Друга складова правої частини рівняння (5.15) через першу властивість простого арифметичного середнього при $n \to \infty$ наближається до нуля

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{[\Delta^2]}{n} - \Delta_L^2\right\}=0.$$

Тоді через властивість розсіювання (2.14) випадкових похибок ліву частину рівняння (5.15) справедливо прирівняти до значення дисперсії σ^2

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[\nu^2]}{n-1} = \sigma^2.$$

Таким чином, перша частина теореми доведена.

Для доказу другої частини теореми припустимо, що виконане t серії в, незалежних рівноточних вимірювань

$$l_1', l_2', \ldots, l_n';\ l_1'', l_2'', \ldots, l_n'';\ .;\ l_1^{(t)}, l_2^{(t)}, \ldots, l_n^{(t)}.$$

Для кожної серії вимірювань запишемо формулу для розрахунку середньоквадратичної похибок $m_i^2 = \frac{[\nu_i^2]}{n-1}$ $i = \overline{1,n}$;

$$m_i^2 = \frac{n}{n-1}\left\{\frac{[\Delta^2]}{n} - \Delta_{L_i}^2\right\},\ i = \overline{1,n},$$

де Δ - погрішність кожного вимірювання в серії, а Δ_{L_i} - похибка і-й серії вимірювань. Підсумуємо отримані вирази і отримаємо формулу

$$[m^2] = \frac{n}{n-1}\sum_{j=1}^{t}\left\{\frac{[\Delta^2]_j}{n} - \Delta_{L_i}^2\right\}.$$

Особливість запису отриманого виразу полягає в тому, що воно записане на змішаній математичній мові, тобто з використанням формального представлення символу суми «[ ]» К.Ф.Гауссом, а також загальноприйнятого в математиці символу суми «$\sum$».

Розділимо почленно все на t і переходячи до межі при $t \to \infty$ матимемо

$$\lim_{t\to\infty}\frac{[m^2]}{t} = \frac{n}{n-1}\left\{\lim_{t\to\infty}\frac{\sum_{j=1}^{t}[\Delta^2]_j}{nt} - \lim_{t\to\infty}\frac{\sum_{j=1}^{t}\Delta_{L_i}^2}{t}\right\}. \qquad (5.16)$$

Розглянемо границі у фігурних дужках виразу (5.16). Перша границя згідно з властив розсіювання дорівнює σ^2, оскільки в чисельнику стоїть сума квадратів випадкових похибок, а в знаменнику - їх кількість. Друга границя є границею суми квадратів випадкових похибок арифметичного серединього, що діляться на їх кількість, яке згідно з властивістю розсіювання дорівнює σ_L^2 і, зважаючи на другу властивість арифметичного середнього (див. формулу 5.3), отримаємо $\sigma_L^2 = \frac{\sigma^2}{n}$.

Зробивши відповідні підстановки, знаходимо

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\left[m^2\right]}{t}=\frac{n}{n-1}\cdot\left(\sigma^2-\frac{\sigma^2}{n}\right)=\sigma^2.$$

Отже, оцінка (5.11) є незміщеною. Таким чином, отримано незміщене наближення до стандарту σ, що і потрібно було довести.

Зберігаючи в (5.11) те ж позначення середньоквадратичної похибки m, як і в (3.6), щоб їх якось розрізняти, наближення (5.11) називатимемо **емпіричною середньоквадратичною похибкою.**

5.3. Послідовність математичної обробки ряду рівноточних вимірювань однієї і тієї ж величини

Перш ніж безпосередньо підійти до розгляду послідовності математичної обробки рівноточних вимірювань виведемо декілька контрольних і допоміжних формул.

Для обчислення простого арифметичного середнього на практиці замість формули (5.1) зручно використовувати формулу, що має вигляд

$$L=L_0+\frac{\delta l_i}{n},\quad i=\overline{1,n}, \tag{5.17}$$

де L_0 - так званий «умовний нуль», тобто доцільно вибране наближене значення, щоб різниці

$$\delta l_i=l_i-L_0\to\min, \tag{5.18}$$

були малими величинами, δ - деяка погрішність l_i вимірювання. Графічна інтерпретація пошуку арифметичного серединього з використанням «умовного нуля» ілюструється рис.5.4.

Дійсно, відповідно до (5.17) і (5.18) можна записати

$$L=L_0+\frac{[l-L_0]}{n}=L_0+\frac{[l]-nL_0}{n}=\frac{[l]}{n}.$$

У результаті отримана формула для обчислення простого арифметичного серединього (5.1). Далі для обчислення за формулою (5.11) емпіричної серед-

ньоквадратичної похибки необхідно спочатку за перетвореною формулою (5.8) обчислити найймовірніші поправки

$$\nu_i = L - l_i, \quad i = \overline{1,n}.$$

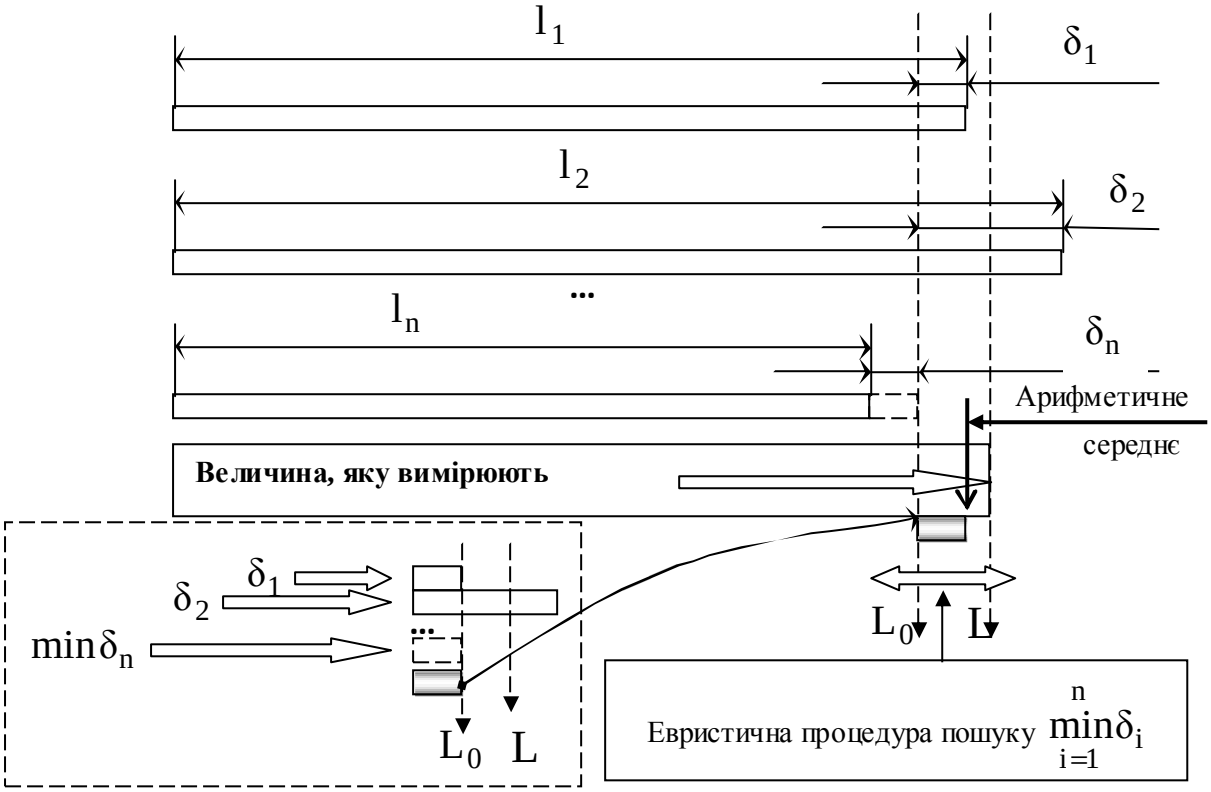


Рис. 5.4 - Ілюстрація знаходження простого арифметичного серединього з використанням «умовного нуля»

Теоретичною перевіркою правильності обчислення арифметичної серединього з використанням «умовного нуля» вимірювань може служити четверта властивість арифметичного середнього. Проте практика показує, що при обчисленні суми найймовірніших поправок за формулою (5.7) процедура округлення отриманих результатів дає зміщене значення L', що відрізняється від значення L на малу величину β, тобто

$$\beta = L' - L \tag{5.19}$$

і зміщені поправки, також відрізняються від найймовірніших поправок на величину β

$$\nu_i' = L' - l_i + \beta, \; i = \overline{1,n}. \tag{5.20}$$

Вищесказане проілюструємо рис. 5.5.

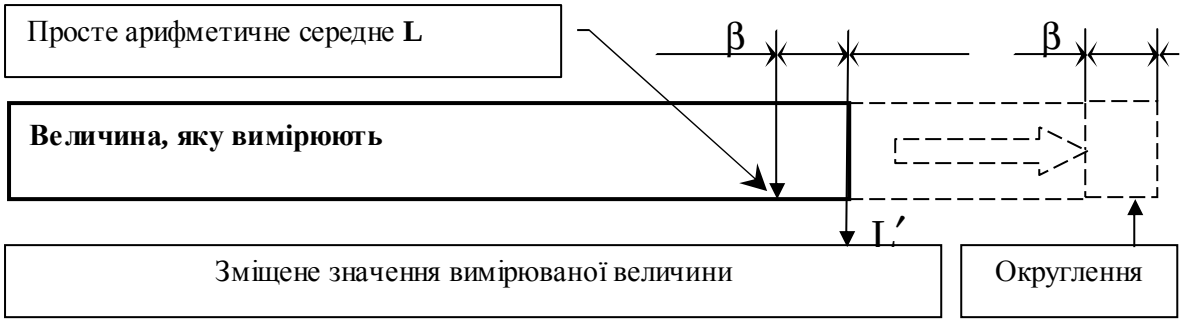


Рис. 5.5 - Ілюстрація зсуву вимірюваної величини за рахунок округлення найймовірніших поправок

Підсумуємо всі від $i=\overline{1,n}$ вирази (5.20) і отримаємо наступний формальний запис:

$$[\nu']=nL-[l]+n\beta.$$

Спираючись на перетворення, які зроблені при доведенні теореми (див. п.п. 5.2) можна записати

$$[\nu']=n\beta. \tag{5.21}$$

Відповідно до п'ятої властивості арифметичного середнього сума наближених поправок виміряної величини $[\nu']$ більше суми найймовірніших поправок $[\nu]$. Формально можна записати $[\nu']>[\nu]$.

Для знаходження незміщеного значення вимірюваної величини скористаємося виразом (5.11), який отриманий при обґрунтуванні п'ятої властивості простого арифметичного серединього (див. п.п. 5.1). Замінимо в цьому виразі **y** на L':

$$\left[(\nu')^2\right]=\left[\nu^2\right]+n(L'-L)^2. \tag{5.22}$$

Прості перетворення формул (5.19) і (5.21) дозволяють записати рівність

$$L'-L=\beta=\frac{[\nu']}{n}.$$

Підставляючи отримані вирази до формули (5.22) отримаємо наступне:

$$\left[\nu^2\right]=\left[(\nu')^2\right]-\frac{[\nu']^2}{n}. \tag{5.23}$$

Отримана сума квадратів найймовірніших поправок вимірюваної величини дорівнює різниці суми квадратів наближеної поправки і середньої величини цих же поправок.

Для перевірки правильності математичних побудов знову скористаємося формулою (5.11), замінивши в ній ν' на δl а **y** на L_0, враховуючи при цьому, що $L_0 - L = \frac{[\delta l]}{n}$ отримаємо

$$[\nu^2] = [\delta^2 l] - \frac{[\delta l]^2}{n}. \qquad (5.24)$$

Порівнюючи праві частини виразів (5.23) і (5.24) видно, що вони мають один і той же фізичний сенс.

Оцінимо надійність обчислень зроблених за формулою (5.12), оскільки емпірична середньоквадратична похибка є величиною наближеною. Таку оцінку можна зробити, використовуючи формулу

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}}. \qquad (5.25)$$

Для визначення середньоквадратичної похибки арифметичного середнього L скористаємося обґрунтуванням другої властивості простого арифметичноого середнього, а саме формулою (5.3). Замінимо в ній невідомі стандарти σ і σ_L середньоквадратичними похибками m і M, і отримаємо

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}}. \qquad (5.26)$$

На підставі отриманих формул (5.25) і (5.26) надійність середньоквадратичної величини M можна оцінити, використовуючи формулу

$$m_M = \frac{m_m}{\sqrt{n}}. \qquad (5.27)$$

Розглянуті вище математичні побудови призводять до наступної послідовності математичних процедур з обробки ряду рівноточних вимірювань однієї і тієї ж величини.

Процедура 1. Аналіз ряду результатів рівноточних вимірювань з метою виявлення і відкидання грубих помилок.

Процедура 2. Евристична процедура з знаходження умовного нуля L_0.

Процедура 3. Процедура обчислення арифметичного середнього, яка полягає в округленні отриманих результатів і визначенні величини зсуву β за формулою (5.19).

Процедура 4. Обчислення зсуву, яка полягає в округленні найймовірніших поправок ν' і їх підсумовування.

Процедура 5. Контрольна перевірка правильності виконаних обчислень. Перевіряється співвідношення величини суми найймовірніших поправок $([\nu'])$, отриманих процедурою 4, і добуток кількості вимірювань на величину зсуву $n\beta$. Якщо існує нерівність $[\nu'] < n\beta$, то обчислення виконані правильно.

Процедура 6. Обчислення значень $(\delta l_i)^2$ і $(\nu'_i)^2$ для кожного вимірювання $i = \overline{1, n}$ і знаходження їх сум.

Процедура 7. Обчислення емпіричної середньоквадратичної похибки m за формулою (5.12), спочатку на основі результатів обчислення, $[\nu^2]$ отриманих за формулою (5.23), а потім на основі результатів обчислення тієї ж величини за формулою (5.24). Обидва результати повинні збігтися в межах точності вимірювань.

Процедура 8. Оцінювання надійності обчислення наближеного значення емпіричної с середньоквадратичної похибки результатів вимірювань за формулою (5.25).

Процедура 9. Обчислення середньоквадратичної похибки простого арифметичного середнього вимірюваної величини L за формулою (5.26).

Процедура 10. Оцінка надійності отриманих результатів вимірювання здійснюється за формулою (5.27).

Використовуючи наведені вище процедури розглянемо приклад математичної обробки ряду незалежних рівноточних вимірювань величини горизонтального кута, зроблених 18-у прийомами теодолітом 2Т5.

Приклад 5.1. Результати вимірювань представлені наступними результатами вимірювань:

$$L_1 = 1151442.1; \quad L_7 = 1151429.8; \quad L_{13} = 1151432.0;$$
$$L_2 = 1151435.2; \quad L_8 = 1151429.1; \quad L_{14} = 1151441.4;$$
$$L_3 = 1151435.4; \quad L_9 = 1151435.3; \quad L_{15} = 1151421.5;$$
$$L_4 = 1151434.4; \quad L_{10} = 1151439.0; \quad L_{16} = 1151434.6;$$
$$L_5 = 1151428.7; \quad L_{11} = 1151432.1; \quad L_{17} = 1151382.9 \to \min;$$
$$L_6 = 1151437.3; \quad L_{12} = 1151427.5; \quad L_{18} = 1151500.1 \to \max.$$

Виконаємо **першу процедуру** і відкинемо результати вимірювань, що мають мінімальне L_{17} і максимальне L_{18} значення.

Враховуючи рекомендації **другої процедури,** за значенням умовного нуля приймемо величину $L_0 = 115^\circ 14' 30''$. Знайдемо значення величин $\delta l_i = L_0 - l_i$ і їх підсумуємо. Результати виконання двох процедур табулюємо і наведено в табл. 5.1.

Виконуючи **третю процедуру** обчислимо за формулою (5.17) просте арифметичне серединьэ, округлятимемо отриманий результат до $0.1''$ і визначимо величину зсуву β за формулою (5.19).

Таблиця 5.1 – Вимірювання і проміжні результати їх математичної обробки

№ п/п	Результати вимірювань l_i	δl_i (с)	δl_i^2	ν'_i (с)	$(\nu'_i)^2$
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	115 14 42.1	12.1	146.4	-8.6	74.0
2	35.2	5.2	27.0	-1.7	2.9
3	35.4	5.4	29.2	-1.9	3.6
4	34.4	4.4	19.4	-0.9	0.8
5	28.7	-1.3	1.7	4.8	23.0
6	37.3	7.3	53.3	-3.8	14.4
7	29.8	-0.2	0	3.7	13.7
8	29.1	-0.9	0.8	4.4	19.4
9	35.3	5.3	28.1	-1.8	3.2
10	39.0	9.0	81.0	-5.5	30.2
11	32.1	2.1	4.4	1.4	2.0
12	27.5	-2.5	6.2	6.0	36.0
13	32.0	2.0	4.0	1.5	2.2
14	41.4	11.4	130.0	-7.9	62.4
15	21.5	-8.5	72.2	12.0	144.0
16	34.6	4.6	21.2	-1.1	1.2
	$L_0 = 115^\circ 14' 30''$	$[\delta l] = 55.4$	$[(\delta l)^2] = 624.9$	$[\nu'] = 0.6$	$[(\nu')^2] = 433.0$
	$[\delta l]/n = 3.46''$			$n\beta = 0.64$	
	$L' = 115^\circ 14' 33.5$				
	$\beta = 0.04$				

Відповідно до **четвертої процедури** обчислимо зсув, який утворюється за рахунок округлення найвырогыдныших поправок ν' і їх підсумуємо (див. стовпець 5 табл. 5.1).

Виконаємо контрольну, **п'яту процедуру**, і порівнянний за величиною $[\nu']$ і $n\beta$. Результат порівняння показує, що величина $[\nu']$на 0.04 одиниць менше величини $n\beta$. Отже, обчислення виконані зроблені правильно.

Шоста процедура забезпечує обчислення квадратів $(\delta l_i)^2$ $(\nu'_i)^2$

Відповідно до **сьомої процедури** зробимо обчислення значень емпіричної середньоквадратичної похибки m спочатку за формулами (5.12) і (5.23), а потім використовуючи формули (5.12) і (5.24).

Зробимо елементарні перетворення формули (5.12) і підставимо до неї двічі чисельні значення, отримані при обчисленні $[\nu^2]$ за формулами (5.23) і (5.24), отримаємо:

- результат обчислення емпіричної середньоквадратичної похибки із використанням чисельних розрахунків за формулою (5.23)

$$m = \sqrt{\frac{433 - \frac{0.6^2}{16}}{16 - 1}} = 5.4'';$$

- результат обчислення емпіричної середньоквадратичної похибки із використанням чисельних розрахунків за формулою (5.24)

$$m = \sqrt{\frac{624 - \frac{55.4^2}{16}}{16 - 1}} = 5.4''.$$

Рівність отриманих результатів показує правильність математичних разрахунків середньоквадратичної похибки.

Оцінювання надійності обчислення наближеного значення емпіричної середньоквадратичної похибки результатів вимірювань здійснюється за **восьмою процедурою** із використанням формули (5.25). Підставляючи до формули чисельне значення $m = 5.4''$отримаємо

$$m_m = \frac{5.4}{\sqrt{2(16-1)}} \approx 1'',$$

що свідчить про високу надійність наближеного оцінювання емпіричної середньоквадратичної похибки результатів вимірювань.

Дев'ятою процедурою обчислюється середньоквадратична похибка знаходження простого арифметичного середнього вимірюваної величини L. Підставляючи до формули (5.26) отримані чисельні значення, маємо

$$\grave{I} = \frac{5.4}{\sqrt{16}} = 1.4''.$$

Остаточною, **десятою процедурою**, здійснюється оцінювання надійності отриманих результатів вимірювань. Для цього обчислюється за формулою (5.27) значення середньоквадратичної похибки результатів вимірювань

$$m_M = \frac{1}{\sqrt{16}} = 0.25'',$$

яке порівнюється з сумарною ймовірною похибкою. У нашому випадку середньоквадратична похибка майже в два з половиною рази менша сумарної найймовірнішої похибки, що свідчить про задовільну надійність отриманих результатів.

Таким чином, на підставі раніше розглянутих понять простого арифметичного середнього і його властивостей, а також теореми про знаходження емпіричної середньоквадратичної похибки сформована строга послідовність математичної обробки ряду рівноточних результатів вимірювань. Математична обробка є десятьма процедурами, що забезпечують як обчислення необхідних величин, так і контроль правильності їх виконання. Наводиться конкретний приклад математичної обробки результатів вимірювання горизонтального кута, що показує працездатність сформованої послідовності математичних побудов.

Додаткові джерела інформації

1. Бурмистров, Г.А. Теория математической обработки геодезических измерений [Текст]: пособие / Г.А. Бурмистров, В.Д.Большаков. – М.: Недра, 1969. – 400 с.

2. Войславский, Л.К. Теория математической обработки геодезических измерений. Часть 1. Теория погрешностей измерений [Текст] учебно-методическое пособие (для студентов 2 курса дневной формы обучения спец. 7.070908 «Геоинформационные системы и технологии») / Л.К. Войславский. – Х.: ХНАГХ, 2006. – 64 с.

3. Зазуляк, П.М. Основи математичного опрацювання геодезичних вимірювань [Текст] навчальний посібник / П.М. Зазуляк, В.І. Гавриш, Е.М. Євсєєва, М.Д.Йосипчук. – Львів: Видавництво «Растр-7», 2007. – 408 с.

Змістовий модуль 6

Нерівноточне вимірювання

6.1. Вага як спеціальна міра відносної точності результатів нерівноточних вимірювань

Наближеними значеннями до стандарту є середньоквадратична і емпірична середньоквадратична похибки вимірюваної величини. Вони ж є абсолютними кількісними заходами точності результатів вимірювань і їх функцій. При зрівнюванні нерівноточних вимірювань виникає необхідність вводити спеціальну міру точності. Такою мірою є вага, формула обчислення якої (2.15) наведена в п.п. 2.5. Розглянемо детально фізичний сенс цього поняття.

Вага це спеціальна характеристика відносної точності вимірювань і їх функцій, обчислена як величина, обернено пропорційна квадрату стандарта, тобто дисперсії результатів випадкових вимірювань.

Якщо існує ряд нерівноточних результатів вимірювань $l_1, l_2, \ldots, l_n$ точність яких характеризується стандартами $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ відповідно, то ваги що характеризують їх відносну точність, визначаються відношеннями

$$p_1 = \frac{c}{\sigma_1^2};\ p_2 = \frac{c}{\sigma_2^2}; \ldots; p_n = \frac{c}{\sigma_n^2}, \tag{6.1}$$

де c – загальний коефіцієнт пропорційності.

Звідси випливає, що вибір із рівним квадрату стандарту σ_i^2 деякого результату вимірювання (реального або уявного) рівнозначний ухваленню ваги цього результату за одиницю.

Позначимо стандарт результату вимірювання, що має вагу, рівну одиниці символом $\bar{\sigma}$.

Тоді рівняння (6.1) можна записати у наступному вигляді:

$$p_1 = \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_1^2};\ \ p_2 = \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_2^2};\ .\ ; p_n = \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_n^2}. \tag{6.2}$$

Величину $\bar{\sigma}$ прийнято називати стандартом одиниці ваги, а його наближені значення так само середньоквадратичною похибкою одиниці ваги і емпіричною середньоквадратичною похибкою одиниці ваги.

Як випливає з наведених вище міркувань і виразів (6.1) і (6.2), результати рівноточних вимірювань мають однакові стандарти, тобто $\sigma_1 = \sigma_2 = \cdots = \sigma_n$ матимуть однакову вагу, які можна прийняти рівними одиниці $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = 1$.

Очевидно, що результати нерівноточних вимірювань, отримані за різних умов, матимуть нерівні ваги. Визначимо значення простого арифметичного середнього L незалежних нерівноточних результатів вимірювань. Для цього зробимо наступні математичні перетворення. На підставі формальних співвідношень (6.1) запишемо пропорцію

$$\frac{p_L}{p} = \frac{\sigma^2}{\sigma_L^2}, \tag{6.3}$$

де σ - стандарт окремого вимірювання; σ_L - стандарт простої арифметичної середини. Враховуючи результати обґрунтування другої властивості простого арифметичного середнього, а саме формальні перетворення (5.3), можна записати

$$\sigma_L = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Підставляючи значення σ_L у пропорцію (6.3), отримаємо

$$p_L = np. \tag{6.4}$$

Звідси випливає, що вага арифметичного середнього незалежних нерівноточних результатів вимірювань в n разів більше ваги окремого результату.

Припустивши, що стандарт одиниці ваги дорівнює середньоквадратичноїй похибці одиниці ваги (див. формулу (6.2)), формула (6.4) набере вигляду

$$p_L = n. \tag{6.5}$$

Таким чином, вага арифметичного середнього незалежних результатів вимірювань одиничної ваги дорівнює кількості цих результатів. При обробці результатів однорідних вимірювань їх ваги є безрозмірними величинами. Якщо ж результати вимірювань мають різну розмірність, наприклад, довжини лінії зміряні в метрах, а горизонтальні кути в секундах, то вага буде іменованою величиною $p = \frac{м^2}{с^2}$.

6.2. Вага функцій результатів нерівноточних вимірювань

Для оцінки відносної точності функції незалежних результатів нерівноточних вимірювань скористаємося формулою, яка випливає з доведення основної теореми теорії похибок, а саме формули (4.2)

$$\sigma_y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 \cdot \sigma_1^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 \cdot \sigma_2^2 + \cdots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_t}\right)^2 \cdot \sigma_t^2}.$$

Перетворимо отриману формулу з метою переходу в ній від стандартів σ до вагів p. Для цього піднесемо ліву і праву частину формули (4.2) до квадрату і підставимо замість квадратів стандартів σ_i^2 вирази (6.1) $\sigma_i^2 = \frac{c}{p_i}$ та, скоротивши ліву і праву частини на загальний множник з, отримаємо формальний запис

$$\frac{1}{p_y} = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 \cdot \frac{1}{p_1} + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 \cdot \frac{1}{p_2} + \cdots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_t}\right)^2 \cdot \frac{1}{p_t}. \tag{6.6}$$

Розглянемо простий окремий випадок використання формули (6.6) для функції з однією змінною $y = cx$. Підставимо цю формулу до (6.6) і, зробивши

відповідні перетворення, отримаємо $\frac{1}{p_y} = c^2 \frac{1}{p_x}$ або $p_y = \frac{p_x}{c^2}$. Застосувавши цю рівність до кожного вимірювання $u = l_i \cdot \sqrt{p_i}$, де l_i- результат і-го вимірювання, а p_i - його вага, отримаємо

$$p_u = \frac{p_i}{\left(\sqrt{p_i}\right)^2} = 1. \qquad (6.7)$$

Отже, з цих математичних побудов випливає, що якщо помножити результат вимірювань на корінь квадратний з його ваги, то вага добутку $l_i \cdot \sqrt{p_i}$ дорівнюватиме одиниці, а його стандарт дорівнює стандарту одиниці ваги $\bar{\sigma}$.

З пропорції (6.2), отриманої на основі (6.1) запишемо $\frac{\sigma_y^2}{\bar{\sigma}^2} = \frac{1}{p_y}$. Перетворюючи цю формулу знайдемо вагу p_y і стандарт σ_y функції $y = cx$, $p_y = \frac{\bar{\sigma}^2}{\sigma_y^2}$,

$$\sigma_y = \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{p_y}}. \qquad (6.8)$$

На основі нескладних математичних перетворень отримані формули, які пов'язують вагу функції результатів нерівноточних вимірювань із її точностними характеристики.

Таким чином, для того, щоб знайти значення стандарту будь-якого результату вимірювання або його функції, достатньо стандарт одиниці ваги розділити на корінь квадратний ваги цього результату або його функції.

При визначенні вагів на практиці можливі два випадки:

1. Стандарти результатів вимірювань відомі і можуть бути визначені теоретично. У цьому випадку для розрахунку вагів використовують вирази (6.1), (6.2) і (6.3).

2. У випадку, якщо стандарти невідомі, то вагам можна дати приблизну оцінку, підставляючи у формулу (6.1) приблизні значення середніх або емпіричних середньоквадратичних похибок, тобто

$$p_i = \frac{c}{m_i^2}\ ,\ i = \overline{1, n}\,. \tag{6.9}$$

Розглянемо приклади математичних побудов для розрахунку вагів у геодезичній практиці.

Приклад 6.1. Математичні перетворення для розрахунку ваги суми кутів теодолітного ходу, виміряних за однакових умов.

Особливістю розв'язання цієї задачі полягає в тому, що вимірювання кутів теодолітного ходу є рівноточними, тобто їх ваги $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = 1$. Враховуючи цю особливість формула (6.6) набере наступний вигляд

$$\frac{1}{p_{[\beta]}} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n}.$$

Підставляючи до формули замість p_i, $i = \overline{1, n}$ одиничне значення, маємо

$$p_{[\beta]} = \frac{1}{n}\ , \tag{6.10}$$

тобто вага суми кутів теодолітного ходу обернено пропорційна кількості виміряних кутів цього ходу.

Приклад 6.2. Математичні перетворення для розрахунку ваги лінійних вимірювань полігомєтричного (теодолітного) ходу. Графічна інтерпретація лінійних вимірювань теодолітного ходу ілюструється рис. 6.1.

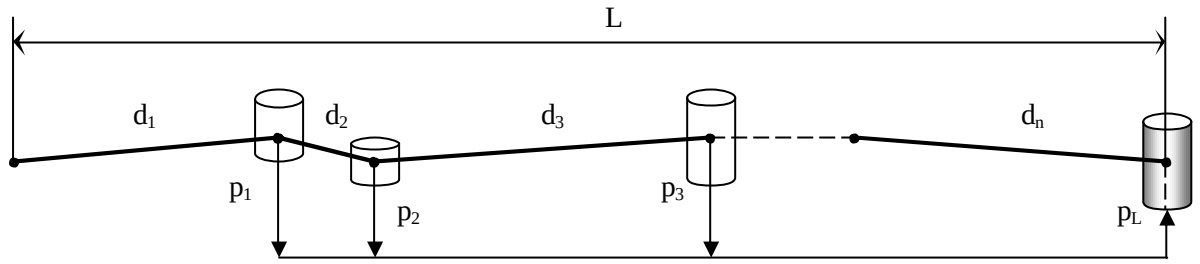


Рис. 6.1 - Ілюстрація до прикладу 2

У основу математичних перетворень для розрахунку ваги лінійних вимірювань полігономєтричного ходу покладений відомий в геодезії факт, що довжина ходу дорівнює сумі довжин його сторін. Цей факт математично можна записати у вигляді рівняння

$$L = d_1 + d_2 + \cdots + d_n = [d]. \qquad (6.11)$$

Крім того, відомо, що стандарт довжини лінії за відсутності систематичних похибок пропорційний кореню квадратному від довжини лінії

$$\sigma_d = \mu_d \sqrt{d},$$

де μ_d - коефіцієнт випадкового впливу.

Тоді підставляючи до виразів (6.2) σ_d для кожної лінії отримаємо формули для обчислення ваги виміряних ліній

$$p_1 = \frac{\bar{\sigma}^2}{\mu_d^2 d_1}, \quad p_2 = \frac{\bar{\sigma}^2}{\mu_d^2 d_2}, .,p_n = \frac{\bar{\sigma}^2}{\mu_d^2 d_n} \ . \qquad (6.12)$$

В отриманих виразах виділимо постійну величину і позначимо її

$$c = \frac{\bar{\sigma}^2}{\mu_d^2},$$

тоді на підставі (6.3) і з урахуванням виразів (6.11) і (6.12) отримаємо

$$\frac{1}{p_L} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n} = \frac{1}{c}(d_1 + d_2 + \cdots + d_n) = \frac{[d]}{c} = \frac{L}{c}.$$

Спростивши отриманий вираз, маємо

$$p_L = \frac{c}{L}. \qquad (6.13)$$

Таким чином, вага лінійних вимірювань полігонометричного ходу обернено пропорційна довжині ходу.

Приклад 6.3. Математичні перетворення для розрахунку ваги перевищення нівелірного ходу, прокладеного на рівнинній місцевості.

Якщо хід прокладений на рівнинній місцевості при середній відстані між рейками $\bar{l}$ кількість станцій в ході буде дорівнювати $n \approx \frac{L}{\bar{l}}$.

Враховуючи формулу (6.6) запишемо

$$\frac{1}{p_L} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n}, \tag{6.14}$$

де $p_1, p_2, \ldots, p_n$ - ваги виміряних перевищень на станції. Уважати, що на всіх станціях перевищення виміряні в однакових умовах (рівноточно), тобто $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = p$ вираз (6.14) можна представити у вигляді

$$\frac{1}{\tilde{p}_L} = \frac{L}{\bar{l}} \frac{1}{\tilde{p}}.$$

Позначивши $\tilde{n} = \bar{l} p$ отримаємо $\frac{1}{p_L} = \frac{L}{c}$ звідки випливає

$$p_L = \frac{c}{L}. \tag{6.15}$$

Слід відзначити рівність формул (6.13) і (6.15), тобто вага перевищення нівелірного ходу, прокладеного на рівнинній місцевості так само, як і за вимірювань полігомєтричного ходу (див. приклад 6.2), обернено пропорційна довжині ходу.

Аналогічно можна довести, що вага перевищення нівелірного ходу, прокладеного на пересіченій місцевості, обернено пропорційна кількості станцій, тобто

$$p_n = \frac{c}{n}. \tag{6.16}$$

Таким чином, розглянуті особливості математичних перетворень, що забезпечують оцінку відносної точності функції незалежних результатів нерівноточних вимірювань, а так само приклади математичних побудов, що дозволяють розраховувати ваги функціональних залежностей, отриманих з геодезичної практики.

6.3. Загальне арифметичне середнє і його властивості

Якщо $l_1, l_2, \ldots, l_n$ - незалежні результати вимірювань однієї і тієї ж величини X, відносна точність яких характеризується відповідно вагами $p_1, p_2, \ldots, p_n$ (вимірювання нерівноточні) то за якнайкраще наближені до величини X приймають загальне арифметичне середнє

$$L = \frac{p_1 l_1 + p_2 l_2 + \cdots + p_n l_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} = \frac{[pl]}{[p]}. \qquad (6.17)$$

Величину L часто називають середньою зваженою.

Отриману формулу (6.17) можна застосовувати лише тоді, коли окремі результати вимірювань можливо порівнювати і вони мають величини одного порядку. Не можна усереднювати результати, отримані за умов вимірювань, що суттєво зрізняться, наприклад, не можна усереднювати довжину лінії, виміряну один раз звичайною рулеткою, а другий раз світлодальноміром, або величину кута, виміряного один раз технічним теодолітом, а другий раз високоточним теодолітом. Виходячи з вищевикладеного випливає, що на ваги у формулі (6.17) мають бути накладені обмежувальні умови, які можна виразити нерівністю

$$c_1 \le p_i \le c_2, \; i = \overline{1, n}, \qquad (6.18)$$

де c_1, c_2- деякі позитивні постійні.

За аналогією з математичними побудовами виконаними в п.п.5.1 розглянемо основні властивості загального арифметичного середнього незалежних нерівноточних результатів вимірювань.

Властивості загального арифметичного середнього

Властивість 1. Вага загального арифметичного середнього незалежних нерівнаточних результатів вимірювань дорівнює сумі вагів цих вимірювань.

Для математичного обґрунтування цього твердження формулу (6.17) представимо у вигляді

$$L = \frac{p_1 l_1}{[p]} + \frac{p_2 l_2}{[p]} + \cdots + \frac{p_n l_n}{[p]}.$$

Розглядаючи L як функцію незалежних змінних $l_1, l_2, \ldots, l_n$ для визначення її ваги, знайдемо частинні похідні

$$\frac{\partial L}{\partial l} = \frac{p_i}{[p]}, \; i = \overline{1, n},$$

і підставимо їх до формули (6.6). У результаті отримаємо наступне співвідношення

$$\frac{1}{p_L} = \frac{p_1^2}{[p]^2} \cdot \frac{1}{p_1} + \frac{p_2^2}{[p]^2} \cdot \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{p_n^2}{[p]^n} \cdot \frac{1}{p_n} = \frac{[p]}{[p]^2}.$$

Після скорочень і перетворення отриманої формули, маємо

$$p_L = [p], \tag{6.19}$$

що формально демонструє вірність сенсового змісту властивості 1. Відповідно стандарт загальної арифметичної середини, враховуючи формулу (6.8), буде рівний

$$\sigma_L = \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{[p]}}. \tag{6.20}$$

Властивість 2. Якщо загальне арифметичне середнє отримане з результатів вимірювань, вільних від систематичних похибок, то і воно не містить систематичної похибки.

Ця властивість, аналогічно третій властивості простого арифметичного середнього, яке розглядалося для ряду рівноточних вимірювань в п.п.5.1. Тому справедливим є запис

$$l_1 - X = \theta_1 + \Delta_1; \; l_2 - X = \theta_2 + \Delta_2; \ldots; \; l_n - X = \theta_n + \Delta_n.$$

Помноживши кожне з цієї рівності на відповідну вагу p_i, $i = \overline{1, n}$ та склавши почленно і розділивши на $[p]$ отримаємо

$$p_1 l_1 - p_1 X = p_1 \theta_1 + p_1 \Delta_1;$$

$$p_2 l_2 - p_2 X = p_2 \theta_2 + p_2 \Delta_2; \ldots; p_n l_n - p_n X = p_n \theta_n + p_n \Delta_n \; \frac{[pl]}{[p]} - X = \frac{[p\theta]}{[p]} + \frac{[p\Delta]}{[p]}.$$

Права частина отриманої рівності складається з двох частин, відповідних до систематичної і випадкової похибок загального арифметичного середнього. Звідси витікає, що якщо $\theta_1 = \theta_2 = \cdots = \theta_n$ дорівнює нулю, то і $[p\theta]$ дорівнюватиме нулю, що і доводить сформульовану вище властивість.

Властивість 3. Якщо результати нерівноточних вимірювань вільні від систематичних похибок, то їх загальне арифметичне середнє при збільшенні кількості вимірювань наближається до дійсного значення вимірюваної величини.

За аналогією з першою властивістю простого арифметичного середнього для ряду рівноточних результатів вимірювань запишемо

$$\lim_{n\to\infty}(L - X) = 0. \tag{6.21}$$

На підставі обмежувальних умов на вимірювання (6.18) запишемо наступні нерівності $c_1 < p_1$; $c_2 < p_2$;...; $c_n < p_n$. Підсумуємо праві і ліві їх частини і отримаємо нову нерівність $nc_i < [p_i]$, $i = \overline{1, n}$. Звідки можна зробити висновок, що за $n \to \infty$ має місце границя

$$\lim_{n\to\infty}[p] = \infty. \tag{6.22}$$

З отриманого виразу (6.22) і формули (6.20) виходить, що стандарт σ_L наближатиметься до нуля, тобто при $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_L = 0. \tag{6.23}$$

Це означає, що загальна арифметична середина L наближатиметься до постійної величини, а оскільки постійна величина не може містити систематичної похибки, то вона має дорівнювати вимірюваній величині X.

На підставі третьої і другої властивості можна зробити висновок, що за відсутності систематичних похибок загальне арифметичне серединє L є дійсною і незміщеною оцінкою X.

Властивість 4. Сума добутков відхилень результатів вимірювань від загального арифметичного середнього

$$v_i = L - l_i,\ i = \overline{1, n} \tag{6.24}$$

на відповідні їх ваги дорівнює нулю, тобто

$$[pv]=0. \qquad (6.25)$$

Помножимо почленно кожний вираз із системи рівнянь (6.24) на відповідні ваги p_i, $i=\overline{1,n}$ і, підсумувавши отриману у такий спосіб рівність, матимемо

$$[p\,v]=[p]L-[pl].$$

Враховуючи формулу для знаходження загального арифметичного серединього (6.17) $L=\frac{[pl]}{[p]}$ підставляючи її до отриманого виразу і перетворюючи, матимемо

$$[p]L=[pl].$$

Підставляючи до отриманої формули вираз (6.25) отримаємо $[p]L=0$, що і потрібно було довести.

Залишається обгрунтувати, що з усіх можливих функцій, отриманих в результаті нерівноточних вимірювань цю властивістю має тільки загальне арифметичне середнє. Для цього візьмемо відмінну від (6.24) функцію y і запишемо для неї систему рівнянь:

$$v'_i=y-l_i,\ i-\overline{1,n}. \qquad (6.26)$$

Віднімаючи від формули (6.26) вираз (6.24), отримаємо різницю відхилень

$$v'_1-v_1=y-L;\ \ v'_2-v_2=y-L;.;\ v'_n-v_n=y-L. \qquad (6.27)$$

Помножимо кожну з рівностей на відповідні ваги p_i $i=\overline{1,n}$, а потім підсумуємо почленно і отримаємо формулу $[pv']-[pv]=[p](y-L)$, яку, враховуючи (6.25), можна перетворити на співвідношення вигляду $[pv']=[p](y-L)$. Звідси витікає, що $[pv']$ буде дорівнювати нулю, тоді і тільки тоді, коли $y=L$, що і потрібно було довести.

Властивість 5. Сума добутків вагів на квадрати відхилень від загального арифметичного серединього завжди менша суми добутків вагів на квадрати

відхилень від будь-якої іншої функції тих же результатів вимірювань, тобто

$$\left[pv^2\right] = \min, \tag{6.28}$$

що відповідає нерівності

$$\left[pv^2\right] < \left[p(v')^2\right]. \tag{6.29}$$

Для доказу отриманої нерівності перетворимо формулу (6.27) до вигляду

$$v'_1 = v_1 + (y - L);\ v'_2 = v_2 + (y - L);\ldots;\ v'_n = v_n + (y - L).$$

Піднесемо ліві і праві частини цієї рівності до квадрату і, привівши їх у відповідність з формулами скороченого множення для многочленів, отримаємо:

$$(v')_1^2 = v_1^2 + 2v_1(y - L) + (y - L)^2;$$

$$(v')_2^2 = v_2^2 + 2v_2(y - L) + (y - L)^2;$$

$$\ldots$$

$$(v')_n^2 = v_n^2 + 2v_n(y - L) + (y - L)^2.$$

Потім помножимо ліві і праві частини отриманих рівнянь на відповідних ваги p_i $i = \overline{1, n}$, отримані вирази почлено складемо. У результаті отримаємо формулу $\left[p(v')^2\right] = \left[pv^2\right] + 2[pv](y - L) + [p](y - L)^2$, яка з урахуванням рівності (6.25) набере вигляду $\left[p(v')^2\right] = \left[pv^2\right] + [p](y - L)^2$. Звідки випливає очевидна нерівність (6.29), що і підтверджує справедливість формулювання п'ятої властивості загального арифметичного середнього результатів нерівноточних вимірювань.

Таким чином, враховуючи окремі математичні побудови знаходження простого арифметичного середнього для рівноточних вимірювань, розглянуті властивості загального арифметичного середнього однієї з основних характеристик оцінювання точності нерівноточних геодезичних вимірювань. Знання властивостей загального арифметичного середнього дозволяє правильно і коректно організувати математичні обчислення в процесі обробки нерівноточних геодезичних вимірювань.

6.4. Формула емпіричної середньоквадратичної похибки одиниці ваги

У основу математичних побудов, що призводять до формального представлення емпіричної середньоквадратичної похибки одиниці ваги вимірювань покладемо обґрунтування першої властивості загального арифметичного середнього, а саме формулу (6.20). За аналогією з випадком рівноточних вимірювань (див. п.п. 5.3, формула (5.26)) невідомий стандарт вимірювань σ_L і стандарт одиниці ваги $\bar{\sigma}$ замінимо середньоквадратичними похибками, отримаємо

$$M = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}}, \tag{6.30}$$

де M – середньоквадратична похибка загального арифметичного середнього μ- середньоквадратична похибка одиниці ваги.

Для оцінки точності загального арифметичного середнього окрім вагів необхідно за наслідками вимірювань знайти середньоквадратичну похибку одиниці ваги μ.

Для розв'язання поставленого завдання наведемо доведення наступної теореми.

Теорема 6.1. Якщо $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n$ відхилення від загального арифметичного середнього, незалежних результатів вимірювань, вільних від змінних систематичних похибок, то величина

$$\mu^2 = \frac{[p\nu^2]}{[n-1]} \tag{6.31}$$

є дійсним і незміщеним наближенням до квадрата стандарту (дисперсії) одиниці ваги.

Якщо змінні систематичні похибки відсутні в результатах вимірювань, то відповідно до другої властивості вони відсутні і в загальному арифметичному середньому.

Як і у разі доведення теореми (див. п.п. 5.2, формула 5.12) про те, що найймовірніші поправки є дійсне і незміщене наближення до квадрата стандар-

ту і на підставі формул (5.13) і (5.14) отримаємо співвідношення для розрахунку найймовірніших поправок нерівноточних вимірювань

$$\nu_1 = \Delta_L - \Delta_1;\ \nu_2 = \Delta_L - \Delta_2; \ldots; \nu_n = \Delta_L - \Delta_n,$$

де Δ_L - випадкова похибка арифметичного середнього Δ_i , $i = \overline{1,n}$ - випадкові похибки результатів вимірювань.

Перетворимо отриману систему рівнянь наступними методами. По-перше, поміняємо місцями праві і ліві частини кожного з рівнянь, по-друге, піднесемо до квадрата праві і ліві частини рівнянь і, по-третє, перетворимо їх відповідно до формул скороченого множення многочленів. У результаті отримаємо

$$\Delta_1^2 = \Delta_L^2 - 2\Delta_L \nu_1 + \nu_1^2;\ \Delta_2^2 = \Delta_L^2 - 2\Delta_L \nu_2 + \nu_2^2; \ldots;\ \Delta_n^2 = \Delta_L^2 - 2\Delta_L \nu_n + \nu_n^2.$$

Помножимо кожен з цих виразів на відповідну йому вагу p_i , $i = \overline{1,n}$ і почленно їх підсумуємо. Це призводить до наступного формального виразу $[p\Delta^2] = [p]\Delta_L^2 - 2\Delta_L [p\nu] + [p\nu^2]$. Враховуючи четверту властивість загальної арифметичної середини, а саме, що $[p\nu] = 0$і, перетворюючи рівняння, отримаємо

$$[p\nu^2] = [p\Delta^2] - [p]\Delta_L^2,$$

Помножимо ліву і праву частини рівняння на $\frac{n}{n(n-1)}$ отримаємо

$$\frac{[p\nu^2]}{n-1} = \frac{n}{n-1}\left\{ \frac{[p\Delta^2]}{n} - \frac{[p]}{n}\Delta_L^2 \right\}, \tag{6.32}$$

і перейдемо до границі за n

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[p\nu^2]}{n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n-1}\left\{ \lim_{n\to\infty} \frac{[p\Delta^2]}{n} - \lim_{n\to\infty} \frac{[p]}{n} \lim_{n\to\infty} \Delta_L^2 \right\}. \tag{6.33}$$

Розглянемо границі правої частини виразу (6.33).

1. При доведенні теореми в п.п. 5.2 вже показано, що

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n-1} = 1.$$

2. Для дослідження границі $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{[p\Delta^2]}{n}$ помножимо результати вимірювань на корені квадратні з їх вагів $l'_i = l_i\sqrt{p_i}$, $i=\overline{1,n}$. Величини l'_i відповідно до (6.7) мають ваги, рівні одиниці, отже, їх можна розглядати як результати рівноточних вимірювань, а їх випадкові похибки $\Delta'_1 = \Delta_1\sqrt{p_1}$, $\Delta'_2 = \Delta_2\sqrt{p_2}$, …, $\Delta'_n = \Delta_n\sqrt{p_n}$ мають стандарт, що дорівнює стандарту одиниці ваги $\bar{\sigma}$. Тому на підставі властивості розсіювання випадкових похибок (2.14) можемо записати

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[p\Delta^2]}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{[(\Delta')^2]}{n} = \bar{\sigma}^2. \qquad (6.34)$$

3. Визначимо, чому дорівнює границя $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{[p]}{n}$. Враховуючи обмежувальні умови на ваги, які розглядалися в п.п.6.3, а саме $c_1 \le p_i \le c_2$ $i=\overline{1,n}$, має місце нерівність $p_i \le c_2$. Підсумуємо ці нерівності від p_i до p_n отримаємо $[p] \le nc_2$. Розділивши ліву і праву частини отриманої нерівності на n і переходячи до границі, знайдемо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[p]}{n} < c_2. \qquad (6.35)$$

4. На підставі третьої властивості загального арифметичного середнього можна підсумувати, що

$$\lim_{n\to\infty}\Delta_L = 0. \qquad (6.36)$$

Підставляючи границі (6.34), (6.35) і (6.36) до вираз (6.33) і зважаючи на обмеженість величини (6.35), переходимо до межі

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[pv^2]}{n-1} = \bar{\sigma}^2, \qquad (6.37)$$

що і доводить спроможність оцінки (6.31). Перша частина теореми доведена.

Для доказу незсуненості оцінки (6.31) припустимо, що є t- рядів результатів незалежних нерівноточних вимірювань:

$$l'_1, l'_2, ..., l'_n;\ l''_1, l''_2, ..., l''_n; ...; l_1^{(t)}, l_2^{(t)}, ..., l_n^{(t)}$$

з вагами $p_1, p_2, ..., p_n$. Тоді цей доказ зводиться до доказу незсуненості оцінки

$$\lim_{t\to\infty} \frac{[\mu^2]}{t} = \bar{\sigma}^2, \tag{6.38}$$

де $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_t$ - величини, обчислені за формулою (6.31) для кожної з наведених вище рядів вимірювань. На підставі формул (6.31) і (6.32) запишемо

$$[\mu^2] = \frac{n}{n-1}\left\{\frac{[p\Delta^2]}{n} - \frac{[p]}{n}\sum_{i=1}^{t}\Delta_L^2\right\}.$$

Розділимо цей вираз почлено на t і перейдемо до межі $t \to \infty$ матимемо рівняння

$$\lim_{t\to\infty}\frac{[\mu^2]}{t} = \frac{n}{n-1}\left\{\lim_{t\to\infty}\sum_{t\to\infty}^{t}\frac{[p\Delta^2]}{nt} - \frac{[p]}{n}\lim_{t\to\infty}\frac{\sum_{i\to\infty}^{t}\Delta_L^2}{t}\right\}. \tag{6.39}$$

Розглянемо границі в правій частині отриманого виразу. Відповідно до формули (6.34)

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\sum[p\Delta^2]}{nt} = \bar{\sigma}^2.$$

Позначимо $\Delta_{L1}, \Delta_{L2}, ..., \Delta_{Lt}$ - випадкові похибки загальних арифметичних середніх, а L', L'',…,$L^{(t)}$ випадкові похибки рівноточних величин, що мають одну і ту саму вагу $[p]$. На підставі властивості розсіювання випадкових похибок (2.14) приймаємо

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\sum\Delta_L^2}{t} = \bar{\sigma}_L^2.$$

Підставимо ці границі до виразу (6.39), отримаємо формулу

$$\lim_{t\to\infty}\frac{[\mu^2]}{t} = \frac{n}{n-1}\left\{\bar{\sigma}^2 - \frac{[p]}{n}\sigma_L^2\right\}.$$

Замінимо σ_L^2 її значенням з (6.20) і проведемо необхідні перетворення. У результаті отримаємо

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\left[\mu^2\right]}{t}=\frac{n}{n-1}\left\{\frac{(n-1)}{n}\bar{\sigma}^2\right\}=\bar{\sigma},$$

що і доводить незсуненість оцінки (6.31), яку називають **емпіричною середньоквадратичною похибкою одиниці ваги**. Доведена друга частина теореми.

Надійність величини, обчисленої за формулою (6.31), як і у разі рівноточних вимірювань, може бути оцінена за допомогою наближеної формули

$$m_\mu=\frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}}. \qquad (6.40)$$

На підставі формули (6.37) дійдемо висновку, що якщо відомі дійсні випадкові похибки ряду нерівноточних вимірювань однієї і тієї ж величини, середньоквадратична похибка одиниці ваги може бути обчислена за формулою

$$\mu=\sqrt{\frac{\left[p\Delta^2\right]}{n}}, \qquad (6.41)$$

а її надійність оцінена за наближеною формулою:

$$m_\mu=\frac{\mu}{\sqrt{2n}}. \qquad (6.42)$$

Таким чином, на основі доведення теореми отримана формула для розрахунку однієї з точностних характеристик нерівноточних вимірювань - емпіричної середньоквадратичної похибки одиниці ваги.

6.5. Послідовність математичної обробки ряду нерівноточних вимірювань однієї і тієї ж величини

За аналогією з організацією послідовності математичної обробки ряду рівноточних вимірювань (див. п.п. 5.3) задамо послідовність математичних процедур для ряду нерівноточних вимірювань однієї і тієї ж величини.

Процедура 1. Обчислення вагів результатів вимірювань. Залежно від конкретних умов вимірювання використовується один із виразів:

- формула (6.1), коли стандарти результатів вимірювань відомі і можуть бути визначені теоретично;

- формула (6.9), коли стандарти невідомі;

- формула (6.10) у разі рівності стандартів (див. приклад 6.1 в п.п.6.2);

- формула (6.13) у разі лінійних вимірювань і відсутності систематичних похибок (див. приклад 6.2 в п.п. 6.2);

- формула (6.14) у разі вимірювання перевищення нівелірного ходу, якщо хід прокладений у рівнинній місцевості і відома середня відстань між станціями, а формула (6.15), якщо вважати, що на всіх станціях перевищення виміряні рівноточно (див. приклад 6.3 в п.п. 6.2).

Процедура 2. Обчислення загального арифметичного серединього за формулою (6.17) і найймовірнішої поправки за формулою $\nu_i = L - l_i \;\; i = \overline{1, n}$.

Особливістю процедури є те, що обчислення переважно виконуються з округленнями, замість L приймаємо її наближене значення L' а замість поправок ν_i - їх сунені величини $\nu'_i \;\; i = \overline{1, n}$.

Процедура 3. Контрольна перевірка правильності обчислення найймовірніших поправок, яка здійснюється з використанням формули

$$[p\nu'] = [p]\,(L' - L). \tag{6.43}$$

Процедура 4. Обчислення зсуненого значення суми $\left[p\nu^2\right]$. Для цього застосовується формула $\left[p(\nu')^2\right] = \left[p\nu^2\right] + [p](L' - L)^2$ яка отримана при доказі п'ятої властивості загального арифметичного серединього. Перетворюючи цей вираз знаходимо

$$\left[p\nu^2\right] = \left[p(\nu')^2\right] - [p](L' - L)^2. \tag{6.44}$$

Процедура 5. Контроль правильності обчислення за формулою (6.44), який здійснюється шляхом розрахунку цієї ж величини, але за іншою формулою

$$\left[pv^2\right]=\left[p(v')^2\right]-\frac{[pv']^2}{[p]}.$$

Якщо результати обчислення однакові, то виконується наступна процедура.

Процедура 6. Обчислення середньоквадратичної похибки одиниці ваги μ шляхом підстановки значення $\left[pv^2\right]$ до формули (6.31).

Процедура 7. Оцінка надійності отриманого результату з використанням формули (6.40).

Процедура 8. Обчислення середньоквадратичної похибки загального арифметичного серединього М за формулою (6.30).

Процедура 9. Оцінка надійності отриманого результату з використанням формули

$$m_M=\frac{m_\mu}{\sqrt{[p]}}. \qquad (6.45)$$

Таким чином, розглянуті особливості нерівноточних вимірювань і на цій підставі наведена послідовність математичних процедур їх обробки.

Додаткові джерела інформації

1. Бурмистров, Г.А. Теория математической обработки геодезических измерений [Текст]: пособие / Г.А. Бурмистров, В.Д.Большаков. – М.: Недра, 1969. – 400 с.

2. Войславский, Л.К. Теория математической обработки геодезических измерений. Часть 1. Теория погрешностей измерений [Текст] учебно-методическое пособие (для студентов 2 курса дневной формы обучения спец. 7.070908 «Геоинформационные системы и технологии») / Л.К. Войславский. – Х.: ХНАГХ, 2006. – 64 с.

3. Зазуляк, П.М. Основи математичного опрацювання геодезичних вимірювань [Текст] навчальний посібник / П.М. Зазуляк, В.І. Гавриш, Е.М. Євсєєва, М.Д. Йосипчук. – Львів: Видавництво «Растр-7», 2007. – 408 с.

Змістовий модуль 7
Подвійні вимірювання

7.1. Загальні положення

У геодезичній практиці прийнято кожну фізичну величину вимірювати незалежно не менше двох разів, оскільки при одному вимірюванні неможливо здійснити контроль правильності вимірювань. Так, горизонтальний кут вимірюється в положеннях труби теодоліта ”круг право” і ”круг ліво”, лінії вимірюють двічі - в прямому і зворотному напрямі, при геометричній нівеляції перевищення на станції визначають за чорним і червоним боками рейки, у тригонометричній нівеляції перевищення визначається в прямому і зворотному напрямі, при нівеляції II і III класу нівелірний хід прокладають в прямому і зворотному напрямі. Такого роду пари вимірювань отримали назву **подвійні вимірювання**.

У кожній парі подвійних вимірювань має місце різниця

$$d_i = l_i' - l_i'', \; i = \overline{1, n}, \tag{7.1}$$

де l_i' , l_i'' - - результати двох вимірювань одного і того ж об'єкту.

Сукупності різниць d_i при достатньо великій їх кількості дають можливість оцінювати точність вимірювань, а у ряді випадків виявляти систематичні похибки.

Зробимо припущення, що з п'яти чинників, розглянутих нами в п.п. 2.3, різниці d_i залежать від виконавця, приладу, методу вимірювання і абсолютно не залежать від об'єкта вимірювання. Тому оцінка точності за різницями подвійних вимірювань може виявитися завищеною, оскільки не враховує похибки центрування теодоліта і установки візирних цілей при вимірюванні горизонтальних кутів, осідання башмаків або кілків при геометричній нівеляції та інші зовнішні чинники.

З цієї причини оцінку точності за різницями подвійних вимірювань іноді називають **оцінкою точності за внутрішньою збіжноістю**.

7.2. Оцінка точності за різницями подвійних рівноточних вимірювань

За відсутності систематичних похибок на підставі того, що за похибку вимірювань приймають різницю між результатом вимірювання і дійсним його значенням можна записати

$$l_i' = X + \Delta_i',\ l_i'' = X + \Delta_i'',\ i = \overline{1, n}, \tag{7.2}$$

де X – дійсне значення вимірюваної величини; Δ_i' Δ_i'' - випадкові похибки результатів вимірювань.

Підставляючи вирази (7.2) до формули (7.1) і здійснюючи відповідні перетворення, отримаємо

$$l_i' - l_i'' = \Delta_i' - \Delta_i'' = d_i,\ i = \overline{1, n}, \tag{7.3}$$

З отриманого результату випливає, що різниці d_i є дійсними похибкам подвійних вимірювань. Тому, якщо є ряд подвійних вимірювань однієї і тієї ж фізичної величини $l_1', l_2', ..., l_i', ..., l_n'$; $l_1'', l_2'', ..., l_i'', ..., l_n''$, $i = \overline{1, n}$, де n - кількість результатів в першій і другій серіях вимірювань. Тоді справедливі різниці $l_1' - l_1'' = d_1;\ l_2' - l_2'' = d_2; \ldots; l_n' - l_n'' = d_n$.

Середньоквадратичну похибку цих різниць із урахуванням співвідношення (3.6) можна обчислити використовуючи вираз

$$m_d = \sqrt{\frac{[d^2]}{n}}\ . \tag{7.4}$$

Якщо припустити, що m – середньоквадратична похибка окремого точкового результату вимірювання (див. п.п.п. 1.3.2), а так само, що за $n \to \infty$ середньоквадратичну похибку приблизно можна прирівняти до стандарту σ

(див. формулу 4.21), то можна записати $m_d = m\sqrt{2}$ або зробивши елементарні перетворення отримаємо

$$m = \frac{m_d}{\sqrt{2}}. \tag{7.5}$$

Підставляючи з формули наближеного обчислення (7.5) m_d до формули (7.4), отримаємо формулу для обчислення середньоквадратичної похибки за різницями подвійних вимірювань:

$$m = \sqrt{\frac{[d^2]}{2n}}, \tag{7.6}$$

а для середнього з двох серії вимірювань $l_i = \frac{1}{2}(l_i' + l_i'')$ на підставі властивості 1 простого арифметичного середнього (див. формулу (5.2)) отримаємо наступне співвідношення

$$M = \frac{m}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{[d^2]}{4n}}. \tag{7.7}$$

При відносно невеликій кількості вимірювань n в кожній серії надійність оцінок, отриманих на основі формул (7.6) і (7.7) можна визначити за формулою $m_m = \frac{m_{m_d}}{\sqrt{2}} = \frac{m_d}{\sqrt{2n} \cdot \sqrt{2}}$ або, враховуючи вираз (7.4) і (7.5), перетворити її на формулу вигляду

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2n}}. \tag{7.8}$$

Далі обчислимо середньоквадратичну похибку простого арифметичного середнього двох серій вимірювань за формулою

$$m_M = \frac{m_m}{\sqrt{2}} = \frac{m}{\sqrt{2n} \cdot \sqrt{2}}$$

або, підставляючи значення m з формули (7.7), отримаємо

$$m_M = \frac{M}{\sqrt{2n}}. \tag{7.9}$$

Розглянутий спосіб оцінки точності за різницями подвійних вимірювань застосовується тоді, коли різниці d_i у певному ряді результатів вимірювань не містять систематичних похибок.

Для виявлення наявності у ряді результатів подвійних вимірювань систематичної похибки скористаємося властивістю компенсації випадкових похибок (1.10). За відсутності систематичної похибки величина $\frac{[d_i]}{n}$ $i=\overline{1,n}$, повинна наближатися до нуля. Інакше можна вважати, що на процес вимірювань мали вплив деякі випадкові чинники або різниці d_i містять систематичні похибки θ_d.

Для виявлення факту наявності в результатах вимірювань систематичних похибок як робочу гіпотезу приймемо, що різниця подвійних вимірювань містить середню систематичну похибку

$$\theta_d = \frac{[d]}{n}.$$

Виключимо цю величину з кожної різниці d_i і формально запишемо

$$\partial_1 = d_1 - \theta_d;\ \partial_2 = d_2 - \theta_d; \ldots; \partial_n = d_n - \theta_d. \qquad (7.10)$$

Тоді, підставляючи до формули (7.5) формулу (7.4), а до неї отримані результати - вирази (7.10), отримаємо формулу для обчислення кількісних значень емпіричної середньоквадратичної похибки

$$m = \sqrt{\frac{[\partial^2]}{2(n-1)}}. \qquad (7.11)$$

Враховуючи величину граничної похибки (див. формулу (3.10)), прийнятої в геодезії, а також формулу (7.11), можна скласти наступну нерівність

$$|\theta_d| > \frac{2m}{\sqrt{n}}, \qquad (7.12)$$

при розв'язанні, якої приходимо до висновку, що різниці d_i містять систематичну похибку θ_d. Інакше величина $\frac{[d_i]}{n}$ є наслідком різних випадкових чинників.

Розглянемо приклад.

Приклад 7.1. У результаті вимірювання перевищень за двох горизонтальних приладів на суміжних станціях за однакових відстаней від інструментів до рейок отримані результати вимірювань, які табульовані в табл.7.1. Необхідно визначити точність вимірювань і їх надійність.

Таблиця 7.1 - Результати вимірювання перевищень

№ станції	h_1 ,м	h_2, м	d,мм
1	-0,479	-0,480	+1
2	-0.292	-0.289	-3
3	-0.207	-0.209	+2
4	-0.175	-0.172	-3
5	-0.102	-0.102	0
6	+0.066	+0.065	+1
7	+0.124	+0.120	+4
8	+0.190	+0.188	+2
9	+0.268	+0.271	-3
10	+0.303	+0.305	-2

Визначимо середню різницю виміряних величин

$$\frac{[d]}{n}=\frac{1+(-3)+2+(-3)+0+1+4+2+(-3)+(-2)}{10}=-0.1 \text{ мм.}$$

Отримана величина набагато менше граничної похибки округлення відліку 0.5 мм, так що припускати наявність в результатах розрахунку різниці d_i систематичної погрішності немає ніяких підстав.

За формулою (7.6) знайдемо середньоквадратичну похибку виміряного перевищення

$$m_h=\sqrt{\frac{[d^2]}{2n}}=\sqrt{\frac{1^2+(-3)^2+2^2+(-3)^2+0^2+1^2+4^2+2^2+(-3)^2+(-2)^2}{2\cdot 10}}=\sqrt{\frac{57}{20}}=1.7\text{мм.}$$

Середньоквадратичну похибку відліку по рейці на підставі (4.21) визначимо з виразу

$$m_u = \frac{m_h}{\sqrt{2}} = \frac{1.7}{\sqrt{2}} = 1.2 \text{ мм.}$$

Середньоквадратичну похибку середнього перевищення обчислимо використовуючи формулу (5.26) і підставляючи до неї значення m_u

$$M = \frac{m_u}{\sqrt{n}} = \frac{1.2}{\sqrt{10}} = 0.38 \text{ мм}$$

Визначимо надійність оцінювання середньоквадратичної похибки відліку по рейці m_u використовуючи формулу (7.8)

$$m_{m_h} = \frac{m_h}{\sqrt{2n}} = \frac{1.7}{\sqrt{20}} = 0.38 \text{ мм}$$

і надійність оцінювання середньоквадратичної похибки середнього перевищення M за формулою (7.9)

$$m_M = \frac{M}{\sqrt{2n}} = \frac{0.38}{\sqrt{20}} = 0.085 \text{ мм.}$$

Порівнюючи оцінні показники точності вимірювань і їх надійності, можна стверджувати, що вимірювання виконані достатньо точно і отриманим результатам можна довіряти.

Розглянемо ще один приклад оцінювання точності і надійності подвійних рівноточних вимірювань.

Приклад 7.2. Досліджуються результати подвійних рівноточних вимірювань, а саме результати зсуву шкал червоного боку пари рейок, які поміщені в табл. 7.2.

Таблиця 7.2 - Результати подвійних рівноточних вимірювань

№ крапок	Відліки		Різниця d, мм	∂ ,мм
	Рейка №1	Рейка №2		
1	5150	5146	+4	0
2	5200	5194	+6	+2
3	5277	5273	+4	0
4	5379	5375	+4	0
5	5196	5194	+2	-3
6	5245	5242	+3	-1
7	5325	5322	+3	-1
8	5426	5420	+6	+2

Аналіз результатів вимірювань, уміщених у табл. 7.2 показують, що вони мають один знак. Цей факт є ознакою наявності у вимірюваннях систематичного зсунення (похибки). Знайдемо величину цього зсунення за формулою:

$$\theta = \frac{[d]}{n} = \frac{32}{8} = 4 \text{ мм.}$$

Обчислимо різниці $\partial_i = d - \theta$, $i = \overline{1,8}$ Результати обчислень занесені до правого стовпця табл. 7.2.

Скористаємося формулою (7.11) для обчислення емпіричної середньоквадратичної похибки відліку по рейці, отримаємо

$$m_u = \sqrt{\frac{[\partial^2]}{2(n-1)}} = \sqrt{\frac{19}{14}} = 1.2 \text{ мм.}$$

Для того, щоб переконається, що результати вимірювань мають систематичну похибку, скористаємося нерівністю (7.12) і, підставляючи до неї набутих значень, отримаємо

$$4 > \frac{2 \cdot 1.2}{\sqrt{8}} = 0.8 \text{ мм.}$$

Результат показує наявність у вимірюваннях систематичної похибки. З використання формули (7.8) оцінимо надійність значення m_u

$$m_{m_u} = \frac{m_u}{\sqrt{2n}} = 0.3 \text{ мм.}$$

Проведене дослідження дозволяє зробити висновок, що червона шкала рейки №1 зміщена відносно рейки №2 на +4 мм. Тому необхідно або замінити одну з рейок в комплекті, або враховувати це зсунення при обчисленні перевищення за червоним боком рейки.

4.3. Оцінка точності за різницями подвійних нерівноточних вимірювань

Розглянемо n пару подвійних нерівноточних вимірювань об'єктів однакового роду. Формально запишемо

$$(l_1', l_1'') \in p_1;\ (l_2', l_2'') \in p_2; \ldots;\ (l_n', l_n'') \in p_n \qquad (7.13)$$

де знак «$\in$» позначає приналежність ваги p_i, $i = \overline{1, n}$, до кожного вимірювання виділених пар. При цьому в кожній парі вимірювання рівноточні.

Така ситуація має місце при порівнянні результатів лінійних вимірювань полігонометричних (теодолітних) ходів, де лінії мають різну довжину, або при порівнянні результатів подвійної нівеляції в ходах різної довжини.

Складемо для кожної пари (7.13) різниці

$$l_1' - l_1'' = d_1;\ l_2' - l_2'' = d_2; \ldots; l_n' - l_n'' = d_n \ , \qquad (7.14)$$

які є дійсними похибками.

Для ваги різниці d_i $i = \overline{1, n}$ запишемо вираз із урахуванням основної теореми теорії похибок і формули (6.6)

$$\frac{1}{p_{d_1}} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1} = \frac{2}{p_1}.$$

Здійснюючи нескладні перетворення отриманої формули, знайдемо вагу різниці кожного вимірювання

$$p_{d_i} = \frac{p_i}{2}. \tag{7.15}$$

Визначимо середньоквадратичну похибку ваги, скориставшись при цьому виразом (6.41) і підставивши в нього вираз (7.15), отримаємо формулу

$$\mu = \sqrt{\frac{\frac{p_1}{2} \cdot d_1^2 + \frac{p_2}{2} \cdot d_2^2 + \cdots + \frac{p_n}{2} \cdot d_n^2}{n}}$$

або спрощуючи її, маємо

$$\mu = \sqrt{\frac{[pd^2]}{2n}}. \tag{7.16}$$

Відповідно середньоквадратична похибка результату одного вимірювання з вагою p_i визначається на підставі (6.8) шляхом заміни в цій формулі стандарту одиниці ваги $\overline{\sigma}$ на средньоквадратичну похибку одиниці ваги μ. Тоді отримаємо

$$m_i = \frac{\mu}{\sqrt{p_i}}, \; i = \overline{1, n}. \tag{7.17}$$

Средньоквадратична похибка арифметичного середнього по кожній парі (7.14) обчислюється за формулою

$$M_i = \frac{\mu}{\sqrt{2p_i}}, \; i = \overline{1, n}. \tag{7.18}$$

Надійність оцінок μ m_i:

$$m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2n}}; \tag{7.19}$$

$$m_{m_i} = \frac{m_i}{\sqrt{2n}}; \tag{7.20}$$

$$m_{M_i} = \frac{M_i}{\sqrt{2n}}. \qquad (7.21)$$

Формули (7.16 – 7.21) справедливі, якщо різниці d_i не містять істотних систематичних похибок.

За наявності систематичних похибок визначають коефіцієнт систематичного впливу, який обчислюється за формулою

$$\lambda_l = \frac{[d]}{[l]}, \qquad (7.22)$$

де l – довжини вимірюваних ліній для лінійних вимірювань і.

$$\lambda_L = \frac{[d]}{[L]}, \qquad (7.23)$$

де L – довжина ходу для подвійної нівеляції.

Знайдемо співвідношення, за допомогою яких можна було б обчислити поправки з урахуванням коефіцієнтів систематичного впливу λ_l і λ_L

$\partial_i = d_i - \lambda_l \cdot l$ для лінійних вимірювань і $\partial_i = d_i - \lambda_L \cdot L$ для подвійної нівеляції.

З урахуванням поправок обчислимо середньоквадратичну похибку одиниці ваги за формулою

$$\mu = \sqrt{\frac{[p\partial^2]}{2(n-1)}}. \qquad (7.24)$$

Для оцінювання надійності середньоквадратичної похибки скористаємося формулою (6.40), підставляючи в неї формулу (7.24).

Середньоквадратична похибка виміряної довжини лінії або нівелірного ходу з урахуванням формули (7.24) розраховується за формулою

$$m_i = \mu\sqrt{L}, \qquad (7.25)$$

а середнє перевищення по ходу розраховується відповідно до виразу

$$M_i = \frac{m_i}{\sqrt{2}} = \frac{\mu}{\sqrt{2p}}. \qquad (7.26)$$

Надійність оцінок точності вимірювань (7.25) і (7.26) визначимо за формулами (7.20) та (7.21).

Приведемо приклад оцінювання точності подвійних вимірювань.

Приклад 7.3. Необхідно оцінити точність результатів подвійної нівеляції 10 ходів, які представлені в табл. 7.3.

Таблиця 7.3 - Результати подвійної нівеляції по 10 ходам

№ ходів	Різниця d, мм	Довжина ходу L, км.	$-\lambda L$, мм	∂, мм	∂^2	$p\partial^2$	m_i ,мм	M_i, мм
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	54.2	2.6	-7.7	46.5	2162.2	831.6	20.5	14.5
2	54.3	8.2	-24.3	30.0	900.0	109.8	36.4	25.7
3	44.0	7.7	-22.8	21.2	449.4	58.4	35.2	24.9
4	-13.4	8.7	-25.8	-39.2	1536.6	176.6	37.5	26.5
5	-2.9	6.2	-18.4	-21.3	453.7	73.2	31.6	22.3
6	54.3	3.5	-10.4	43.9	1927.2	550.6	23.8	16.8
7	32.3	2.3	-6.8	25.5	650.2	282.7	19.3	13.6
8	-5.5	6.7	-19.9	-25.4	645.2	96.3	32.9	23.3
9	-24.8	3.1	-9.2	-34.0	1156	372.9	22.4	15.8
10	-29.5	6.0	-17.8	47.3	2237.3	372.8	31.1	22.0
	$[d]=1630$	$[L]=550$						

Підсумуємо значення другого і третього стовпців табл.7.3, отримаємо $[d]=1630$ і $[L]=550$. За формулою (7.23) обчислимо коефіцієнт систематичного впливу на вимірювання:

$$\lambda_L = \frac{[d]}{[L]} = 2.96 \ \frac{\text{мм}}{\text{км}}.$$

Для обчислення різниць ∂_i $i=\overline{1,10}$ необхідно обчислити добутки $\lambda_L L_i$ і їх значення, з урахуванням знаку, занести до 4-ого стовпця табл. 7.3. Сума цих добутків рівна $[-\lambda L]=163.1$. Відомі значення підставимо до формули $\partial_i = d_i - \lambda \cdot L_i$, яка враховує поправку, компенсуючу систематичні погрішності кожного ходу подвійної нівеляції. Результати обчислення величин ∂_i умістимо до 5-ого стовпця табл.7.3.

Розрахуємо поправку ∂^*, яка враховує як коефіцієнти систематичного впливу для окремо узятого вимірювання, так і довжини ходу для подвійної нівеляції. Цю поправку обчислимо спочатку перетворивши формулу (7.23) до ви-

гляду $[d]=\lambda_L[L]$, а потім підставляючи відоме значення $[-\lambda L]$ і обчислене значення $\lambda_L[L]=163.2$ до формули $\partial^* = \lambda_L[L]-[\lambda L]$, отримаємо $\partial^* = 0.1$.

Зважаючи на формулу (6.14) для обчислення ваги перевищення нівелірного ходу розрахуємо $p_i = \frac{1}{L_i}$ для нашого випадку і отримані ваги помножимо на квадрати різниць ∂^2. Результати занесемо до 7-ого стовпця табл.7.3. Підсумуємо отримані результати відповідно до формули $[p\partial^2] = 2924.9$.

Показники оцінки точності результатів вимірювань

Обчислимо середньоквадратичну похибку одиниці ваги, яку вважають показником оцінки точності результатів вимірювань. Для цього у формулу (7.24) підставимо відомі чисельні значення, отримаємо

$$\mu = \sqrt{\frac{2924.9}{2(10-1)}} = 12.7\,\frac{\text{мм}}{\text{км}}.$$

Обчислимо середньоквадратичну похибку виміряних довжин ліній або нівелірного ходу для кожного з ходів за формулою (7.27), а результати занесемо до 8-ого стовпця табл.7.3

$$m_i = \mu\sqrt{L_i}. \qquad (7.27)$$

Обчислимо середнє перевищення по ходу враховуючи формулу (7.26) та (6.15) і приводячи їх до вигляду

$$M_i = \mu\sqrt{\frac{L_i}{2}} = \frac{m_i}{\sqrt{2}}. \qquad (7.28)$$

Показники оцінювання надійності результатів вимірювань

Надійність значення показника μ оцінимо з використанням формули (7.19)

$$m_\mu = \frac{12.7}{\sqrt{20}} = 2.8\,\text{мм}.$$

Надійність значень показника m_i оцінимо з використанням формули (7.20) підставляючи до неї результати обчислень (див. 8-й стовпець табл.7.3), отримаємо

$$m_{m_1} = \frac{m_1}{\sqrt{2n}} = \frac{20.5}{\sqrt{20}} = 4.58;\ m_{m_2} = \frac{m_2}{\sqrt{2n}} = \frac{36.4}{\sqrt{20}} = 8.14;\ldots;m_{m_{10}} = \frac{m_{10}}{\sqrt{2n}} = \frac{31.1}{\sqrt{20}} = 6.95.$$

Надійність значень показника M_i оцінимо з використанням формули (7.21), підставивши до неї результати обчислень (див. 9-й стовпець табл.7.3), отримаємо

$$m_{M_1} = \frac{M_1}{\sqrt{2n}} = \frac{14.5}{\sqrt{20}} = 3.24;\ m_{M_2} = \frac{M_2}{\sqrt{2n}} = \frac{25.7}{\sqrt{20}} = 5.74;\ldots;m_{M_{10}} = \frac{M_{10}}{\sqrt{2n}} = \frac{22.0}{\sqrt{20}} = 4.91\ .$$

Узагальнимо отримані в процесі математичної обробки результати. З урахуванням компенсації систематичної похибки середньоквадратична похибка одиниці ваги подвійних вимірювань склала 12.7 мм/км., що при сумарному значенні довжини ходу $[L]=55.0$ км. складає незначну величину. У цому випадку можна стверджувати, що подвійні вимірювання проведені з достатньою точністю.

Решта показників m_i і M_i характеризують точність подвійних вимірювань кожного ходу. Аналіз 8-го і 9-го стовпців табл. 7.3 показують, що найбільш грубий результат отриманий при вимірюванні 4 ходи. Порівнюючи показники точності оцінок і їх надійності, можна стверджувати про достатньо високу точність вимірювань і їх надійності.

Таким чином, розглянуті загальні положення і особливості подвійних вимірювань. На цій основі розглянуті процедури і показники оцінювання точності за різницями подвійних рівноточних і нерівноточних вимірювань. Показано, що оцінка надійності є складовою частиною оцінювання точності результатів вимірювання. Приклади, розглянуті у цому розділі сприяють кращому засвоєнню логіки математичних перетворень.

Додаткові джерела інформації

1. Бурмистров, Г.А. Теория математической обработки геодезических измерений [Текст]: пособие / Г.А. Бурмистров, В.Д.Большаков. – М.: Недра, 1969. – 400 с.
2. Войславский, Л.К. Теория математической обработки геодезических измерений. Часть 1. Теория погрешностей измерений [Текст] учебно-методическое пособие (для студентов 2 курса дневной формы обучения спец. 7.070908 «Геоинформационные системы и технологии») / Л.К. Войславский. – Х.: ХНАГХ, 2006. – 64 с.
3. Зазуляк, П.М. Основи математичного опрацювання геодезичних вимірювань [Текст] навчальний посібник / П.М. Зазуляк, В.І. Гавриш, Е.М. Євсєєва, М.Д. Йосипчук. – Львів: Видавництво «Растр-7», 2007. – 408 с.

Змістовий модуль 8

Короткі відомості про залежні випадкові величини і залежні похибки

8.1. Види залежностей

На процес геодезичних вимірювань, як показано в п.п. 2.3, має вплив безліч взаємопов'язаних між собою чинників. Тому результати вимірювань і їх похибки переважно представляються випадковими величинами, які мають між собою певну залежність. Наприклад, результати вимірювань довжини і похибки вимірювань залежать від температури і вологості навколишнього середовища, результати вимірювання кутів перевищення залежить від точності використаного приладу і так далі

У математичній статистиці виділяють три основні залежності між парами двох випадкових величин X і Y.

1. **Функціональна залежність**

Чітка функціональна залежність між випадковими величинами в геодезичній практиці присутня рідко. Це пов'язано з тим, що обидві величини або одна з них схильні до дії випадкових чинників. Більш того, серед цих чинників можуть бути і загальні, тобто що впливають і на X, і на Y.

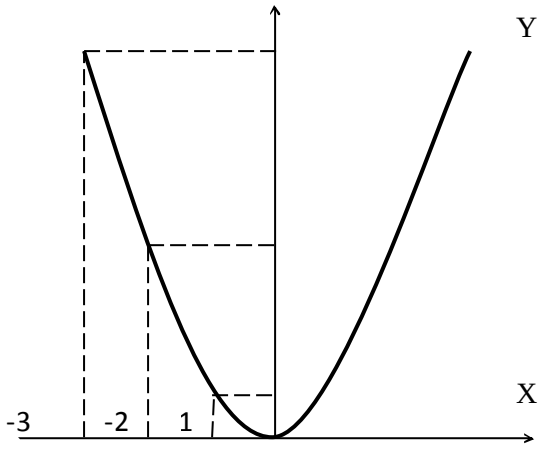
Це залежність, коли значенню X відповідає одне значення Y. Така залежність може бути виражена у вигляді функції $Y = f(x)$, представленою у вигляді графіка або таблиці.

Так, наприклад, функція $y = x^2$ може бути представлена у вигляді параболи або у вигляді таблиці (див. мал. 8.1).

2. Стохастична залежність

При стохастичній залежності, яка має місце тільки для випадкових величин, у тому числі і для випадкових похибок, одному значенню x може відповідати декілька або жодного значення y. Така залежність може бути виражена тільки у вигляді таблиці або графіка (див. рис. 8.2). Тут ілюструється, так

звана емпірична залежність, яка на малюнку показана сукупністю точок, тобто результатів вимірювань. Лінією на рисунку показана теоретична залежність, отримана в результаті математичної обробки емпіричної залежності.



x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

Рис. 8.1- Функціональна залежність $y = x^2$

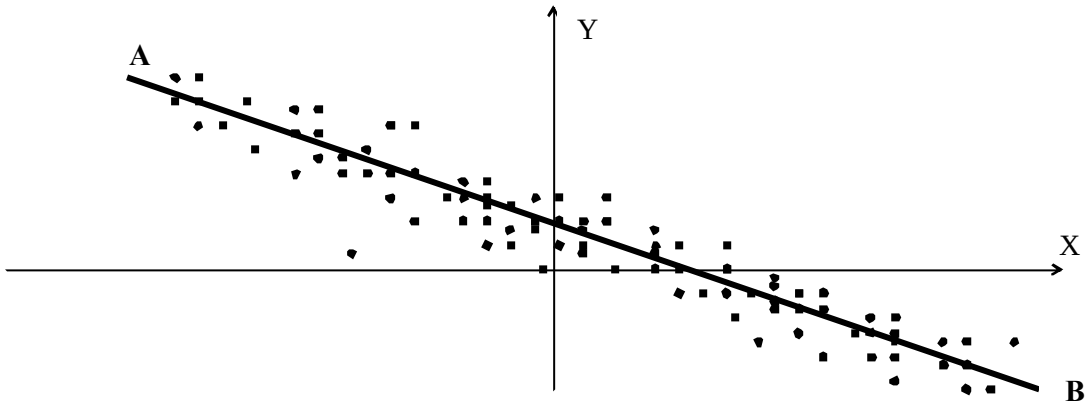


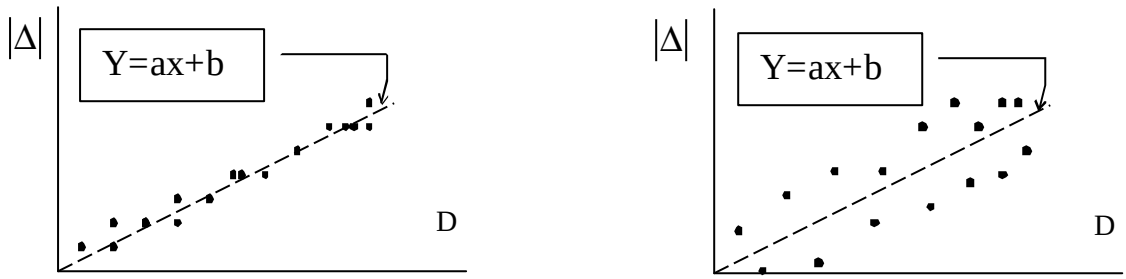
Рис. 8.2 - Емпірична і теоретична залежності результатів вимірювання фізичної величини

На рис. 8.2 наочно показано, що результати вимірювань розташовані вузькою смугою уздовж лінії **AB** і мають лінійний стохастичний (випадковий) характер.

Приклад 8.1. Та сама відстань **D** виміряна двома групами фахівців. Першу групу склали фахівці, що мають великий досвід геодезичних робіт, які проводили вимірювання високоточними приладами. Друга група складалася із

студентів, що проходять практику геодезичних вимірювань з приладами невисокої точності.

Результати вимірювань і залежності їх від похибок показані на рис.8.3. Видно, що розкид емпіричних значень у другій групі більший, ніж у першій групі. Тому, як математичний апарат для оцінювання точності вимірювань залежних випадкових величин, використовують кореляційний і регресійний аналіз.



Результати вимірювань 1-ою групою Результати вимірювань 2-ою групою

Рис. 8.3 - Корелограми і прямі регресії

Існують і складніші стохастичні залежності, коли точки групуються вздовж вузької смуги, що нагадує криву. Однак вони тут розглядатися не будуть. Відзначимо тільки, що багато нелінійних залежностей можна перетворити на лінійні.

3. Відсутність залежності

Має місце тільки для випадкових величин, середніх і випадкові похибки. Як і у разі стохастичної залежності, таку множину можна представити у вигляді таблиці або показати графічно (див. рис.8.3).

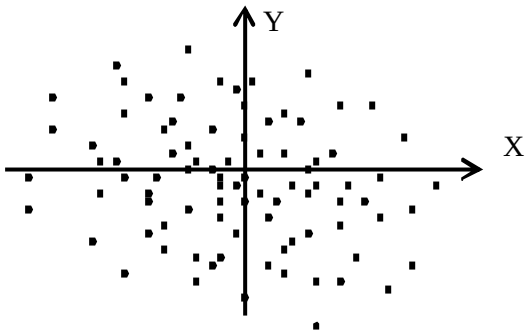


Рис. 8.3 - Ілюстрація відсутності залежності між результатами вимірювань

Основною ознакою, підтверджуючою відсутність залежності, є границя

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[xy]}{n}=0. \qquad (8.1)$$

Окремим випадком границі (8.1) є властивість незалежності випадкових похибок, представлена границею (1.12).

8.2. Кількісні характеристики лінійної стохастичної залежності

Лінійна стохастична залежність не може бути точно виражена функціональною залежністю, наприклад, у вигляді параболи, зображеної на рис.8.1, або інших чітких залежностях - логарифмічною, показниковою і так далі Разом з тим, існують кількісні характеристики, що точно описують взаємозалежність між величинами *x* і *y*. Вивченням кількісних характеристик, що описують залежність зв'язків між випадковими величинами займається теорія кореляції.

Кореляція — статистичний взаємозв'язок двох або декількох випадкових величин (або величин, які можна з деякою припустимою мірою точності вважати такими). При цьому, зміни однієї або декількох з цих величин призводять до систематичної зміни іншої або інших величин.

Однією з характеристик оцінки тісноти зв'язку за дослідними (апостеріорними) даними величин *x* і *y* є кореляційний момент

$$k=\frac{[xy]}{n}-\bar{x}\bar{y}, \qquad (8.2)$$

де n - об'єм вибірки, тобто кількість пар x,y;

$\bar{x}=\frac{[x]}{n}$ - середнє значення *x*;

$\bar{y}=\frac{[y]}{n}$ - середнє значення y.

Величина k залежить від розмірності величин x і y і тому вона не зовсім зручна для оцінювання тісноти зв'язку цих величин.

Найбільш ефективним критерієм оцінювання тісноти зв'язку виміряних геодезичних величин є вибірковий коефіцієнт кореляції, що обчислюється за формулою

$$r=\frac{k}{m_x m_y}, \qquad (8.3)$$

де $m_x = \sqrt{\frac{[x^2]}{n} - \bar{x}^2}$ $m_y = \sqrt{\frac{[y^2]}{n} - \bar{y}^2}$.

Властивості коефіцієнта кореляції:

1. Коефіцієнт кореляції набуває значень в інтервалі від -1 до +1, тобто справедлива нерівність $-1 \le r \le +1$.

2. Коли коефіцієнт кореляції дорівнює +1 або -1, між величинами x і y існує лінійна функціональна залежність вигляду

$$y = ax + c \text{ або } x = by + d.$$

3. Якщо $r = 0$то між величинами x і y лінійна залежність відсутня, але можуть існувати складніші залежності.

Коефіцієнт кореляції, обчислений за дослідними даними в загальному випадку є величиною випадковою. Тому при значеннях $r < 0.5$ виникає наступне питання: чи підтверджує обчислене значення r наявність стохастичного зв'язку величин x і y або воно є наслідком якихось випадкових чинників? Іншими словами, чи є r величиною значущою?

При $n > 50$критерієм значущості може бути средньоквадратична похибка

$$m_r = \frac{1 - r^2}{\sqrt{n}}. \tag{8.4}$$

Стохастичний зв'язок між величинами x і y вважається за встановленим, якщо

$$|r| > 3m_r. \tag{8.5}$$

При $n < 50$ критерієм значущості можуть служити критичні значення коефіцієнта кореляції за $r = 0$, наведені в табл. 8.1. Якщо при об'ємі вибірки n і заданій вірогідності 0.75, 0.90,…,0.995 обчислене значення r більше наведеного в таблиці, то з вірогідністю p можна стверджувати, що $r > 0$ і стохастична залежність між величинами x і y існує.

Приклад 8.2. За вибіркою $n = 16$ обчислений коефіцієнт кореляції $r = 0.72$. На перетині рядка $n = 16$ і стовпця $p = 0.995$ знаходимо критичне значення, яке дорівнює 0.6226. Оскільки 0.72 > 0.6226, з вірогідністю $p = 0.995$ можемо стверджувати, що величини x і y мають стохастичну залежність. Критичні значення для коефіцієнта кореляції, коли $p = 0$,

$P = \{ r \le \text{табл.знач} | . p = 0 \} = \gamma$

Таблиця 8.1 - Початкові дані для оцінювання залежності випадкових величин

n	Ймовірність наявності залежності між випадковими величинами					
	0.75	**0.90**	**0.95**	**0.975**	**0.99**	**0.995**
3	0.7071	0.9511	0.9877	0.9969	0.9995	0.9999
4	0.5000	0.8000	0.9000	0.9500	0.9800	0.9900
5	0.4040	0.6870	0.8054	0.8783	0.9343	0.9587
6	0.3473	0.6084	0.7293	0.8114	0.8822	0.9172
7	0.3091	0.5509	0.6694	0.7545	0.8329	0.8745
8	0.2811	0.5067	0.6215	0.7067	0.7887	0.8343
9	0.2596	0.4716	0.5822	0.6664	0.7498	0.7977
10	0.2423	0.4428	0.5493	0.6319	0.7155	0.7646
11	0.2281	0.4187	0.5214	0.6021	0.6851	0.7348
12	0.2161	0.3981	0.4973	0.5760	0.6581	0.7079
13	0.2058	0.3802	0.4762	0.5529	0.6339	0.6835
14	0.1968	0.3646	0.4575	0.5324	0.6120	0.6614
15	0.1890	0.3507	0.4409	0.5140	0.5923	0.6411
16	0.1820	0.3383	0.4259	0.4973	0.5742	0.6226
17	0.1757	0.3271	0.4124	0.4822	0.5577	0.6055
18	0.1700	0.3170	0.4000	0.4683	0.5426	0.5897
19	0.1649	0.3077	0.3887	0.4555	0.5285	0.5751
20	0.1602	0.2992	0.3783	0.4438	0.5155	0.5614
21	0.1558	0.2914	0.3687	0.4329	0.5034	0.5487
22	0.1518	0.2841	0.3598	0.4227	0.4921	0.5368
23	0.1481	0.2774	0.3515	0.4132	0.4815	0.5256
24	0.1447	0.2711	0.3438	0.4044	0.4716	0.5151
25	0.1415	0.2653	0.3365	0.3961	0.4622	0.5052
30	0.1281	0.2407	0.3061	0.3610	0.4226	0.4629
35	0.1179	0.2220	0.2826	0.3338	0.3916	0.4296
40	0.1098	0.2070	0.2638	0.3120	0.3665	0.4026
45	0.1032	0.1947	0.2483	0.2940	0.3457	0.3801
50	0.0976	0.1843	0.2353	0.2787	0.3281	0.3610

Якщо встановлено, що між величинами x і y - зв'язок істотний, може бути складене так зване *рівняння регресії* – функція, що описує стохастичний зв'язок

$$y_i = \bar{y} + r\frac{m_y}{m_x}(x_i - \bar{x}). \qquad (8.6)$$

8.3. Залежні випадкові похибки в геодезії

Залежні випадкові похибки в геодезії зустрічаються рідко, але проте іноді мають місце.

Хай задано два ряди залежних випадкових похибок $\Delta_{1,}\Delta_2,...,\Delta_n$ і $\Delta'_{1,}\Delta'_2,...,\Delta'_n$, отримані в умовах, що характеризуються стандартами σ і σ'. Тоді на підставі (8.3), (8.4) можемо записати

$$k = \lim_{n\to\infty} \frac{[\Delta\Delta']}{n}, \qquad (8.7)$$

$$r = \frac{k}{\sigma\sigma'}. \qquad (8.8)$$

У разі залежних похибок формула основної теореми на відміну від (4.2) набирає вигляду

$$\sigma_y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_1^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_2^2 + ... + \left(\frac{\partial y}{\partial x_t}\right)^2 \sigma_t^2 + 2\sum r_{ij} \frac{\partial y \partial y}{\partial x_i \partial y_j} \sigma_i \sigma_j}. \qquad (8.9)$$

Простим прикладом залежних випадкових похибок є похибки суміжних кутів при вимірюванні способом кругових прийомів. Насправді, похибка загального напряму 2, якщо зменшує кут β_1, то неминуче збільшує кут β_2 і навпаки. Ця обставина породжує негативну стохастичну залежність з коефіцієнтом кореляції $r = -0.5$.

Складніші випадки залежних похибок розглядаються в другій частині цього курсу.

Таким чином, розглянуті основні відомості випадкових величин і залежних похибок, які зустрічаються в геодезичній практиці. Наведені основні види залежностей випадкових величин і кількісні характеристики лінійних стохастичних залежностей.

Додаткові джерела інформації

1. Бурмистров, Г.А. Теория математической обработки геодезических измерений [Текст]: пособие / Г.А. Бурмистров, В.Д.Большаков. – М.: Недра, 1969. – 400 с.
2. Войславский, Л.К. Теория математической обработки геодезических измерений. Часть 1. Теория погрешностей измерений [Текст] учебно-методическое пособие (для студентов 2 курса дневной формы обучения спец. 7.070908 «Геоинформационные системы и технологии») / Л.К. Войславский. – Х.: ХНАГХ, 2006. – 64 с.
3. Зазуляк, П.М. Основи математичного опрацювання геодезичних вимірювань [Текст] навчальний посібник / П.М. Зазуляк, В.І. Гавриш, Е.М. Євсєєва, М.Д.Йосипчук. – Львів: Видавництво «Растр-7», 2007. – 408 с.

ДОДАТОК А

ТЕЗАУРУС

Абсолютне вимірювання — вимірювання, засноване на прямих вимірюваннях однієї або декількох основних величин і (або) використанні значень фізичних констант.

Абсолютна похибка дорівнює модулю різниці між оцінкою і межею інтервалу**,** тобто напівширині надійного інтервалу.

Апостеріорі (лат. a posteriori, буквально - з наступного) знання основане на досвіді, на практиці.

Вага [weight] — в найзагальнішому розумінні: деяке дійсне число f(x), поставлене у відповідності до кожного элемента (объекта) x з множени X і вибране таким чином, щоб цю множину можна було упорядкувати, увівши умову: $x < y$, якщо $f(x) < f(y)$.

Вимірювання - сукупність операцій для визначення відношення однієї (вимірюваної) величини до іншої однорідної величини, прийнятої за одиницю, яка зберігається в технічному засобі (засобі вимірювань). Значення, що отримани, називають числовим значенням вимірюваної величини, числове значення сумісне з позначенням використаної одиниці називається значенням фізичної величини. Вимірювання фізичної величини дослідним шляхом проводиться за допомогою різних засобів вимірювань — мір.

Випадкова похибка — похибка, змінна (за величиною і за знаком) від вимірювання до вимірювання.

Відносне вимірювання — вимірювання відношення величини до однойменної величини, що відіграє роль одиниці, або вимірювання зміни величини відносно однойменної величини, що приймається за початкову.

Відносна похибка дорівнює відношенню абсолютної похибки до оцінки дійсного значення. Переважно цю похибку виражають у відсотках. Величину, зворотну відносній похибці, називають **точністю** вимірювань.

Геодезія - система наук про визначення форми і розмірів Землі і про методи вимірювання на земній поверхні для відображення її на планах і картах. Геодезія пов'язана з астрономією, геофізикою, космонавтикою, картографією та ін., широко використовується при проектуванні і будівництві споруд, судноплавних каналів, доріч.

Геодезія підрозділяється на:

- астрономогеодезію, що вивчає фігуру і гравітаційне поле Землі;
- теорію і методи побудови опорної геодезичної мережі;
- топографію;
- прикладну геодезію та інше.

Геодезичні вимірювання перевищень – вид лінійних геодезичних вимірювань, у яких вимірюваною геодезичною величиною є різниці висот пунктів (точок).

Геодезичні вимірювання – вимірювання, що проводять у процесі топографо-геодезичних робіт.

Принципом геодезичних вимірювань є фізичне явище, покладене в основу геодезичних вимірювань. У геодезичних засобах вимірювань використовують ряд принципів, які реалізують різні фізичні явища: оптичний, оптико-механічний, оптико-електронний, електромагнітний, імпульсний, фазовий, супутниковий, доплерівський, інтерференційний та інші принципи.

Границя - одне з основних понять математики. Постійна, до якої необмежено наближається деяка змінна величина, залежна від іншої змінної величини, при певній зміні останньої. Простим є поняття «границя числової послідовності», за допомогою якого можуть бути визначені поняття «границя функції», «границя послідовності точок простору» та інші.

Груба похибка (промах) — похибка, яка виникла внаслідок недогляду експериментатора або несправності апаратури (наприклад, якщо експериментатор неправильно прочитав номер поділки на шкалі приладу, якщо відбулося замикання в електричному ланцюзі).

Дисперсія - у математичній статистиці і теорії ймовірності - мера розсіяння (відхилення від середнього). У статистиці дисперсія є середнє арифметичне з квадратів відхилень спостережуваних значень (x1, x2...,xn) випадкової величини, які спостерігають, від їх середнього арифметичного.

Емпірика - конкретні, досвідні дані.

Єдність вимірювань – стан вимірювань, що характеризується тим, що їх результати виражаються в узаконених одиницях, розміри яких у встановлених межах дорівнюють розмірам одиниць, відтвореним первинними еталонами, а похибки результатів вимірювань відомі та із заданою вірогідністю не виходять за встановлені межі.

Засіб вимірювань – технічний засіб, що призначений для вимірювань і має нормовані метрологічні характеристики.

Інструментальні (приладові) похибки - похибки, які визначаються похибками вжитих засобів вимірювань і викликані недосконалістю принципу дії, неточністю градуювання шкали, ненаглядністю приладу.

Клас точності — узагальнена характеристика приладу, що характеризує припустимі за стандартом значення основних і додаткових похибок, які впливають на точність вимірювання.

Кореляція — статистичний взаємозв'язок двох або декількох випадкових величин або величин, які можна з деякою припустимою мірою точності вважати за такі. При цьому зміни однієї або декількох з цих величин призводять до систематичної зміни іншої або інших величин. Математичною мірою кореляції двох випадкових величин служить коефіцієнт кореляції.

Критерій — ознака, підстава, мірило оцінки чого-небудь. Особливо виділяють критерії істинності знань. Розрізняють логічні (формальні) і емпіричні (експериментальні) критерії істинності. Формальним критерієм істини служать логічні закони: істинно все, що не містить в собі суперечності, логічно правильне. Емпіричним критерієм істинності служить відповідність знання експериментальним даним. Питанням про критерії істини, що визначають різні філософські школи, займається теорія пізнання або **гносеологія**.

Кутові (геодезичні) вимірювання – вид геодезичних вимірювань, у яких вимірюваною геодезичною величиною є горизонтальні і (або) вертикальні кути (зенітні відстані).

Лінійні (геодезичні) вимірювання – вид геодезичних вимірювань, у яких вимірюваною геодезичною величиною є довжини сторін геодезичних мереж (відстані або їх різниці).

Логарифм числа b за основою a визначається як показник степеня яку піднесення числа **a**, щоб отримати число **b**. Позначення: $\log_a b$. З визначення виходить, що записи $\log_a b = x$ і $a^x = b$ рівнозначні. Приклад: $\log_2 8 = 3$ тому, що $2^3 = 8$.

Математичне очікування - поняття середнього значення випадкової величини у теорії ймовірностей.

Методом геодезичних вимірювань є сукупність операцій з виконання геодезичних вимірювань відповідно до принципу вимірювань, виконання яких забезпечує отримання результатів із заданою точністю, що реалізовується

Метод вимірювань — прийом або сукупність прийомів порівняння вимірюваної фізичної величини з її одиницею відповідно до реалізованого принципу вимірювань. Метод вимірювань зазвичай зумовлений пристроєм засобів вимірювань.

Методичні похибки - похибки, зумовлені недосконалістю методу, а також спрощеннями, покладеними в основу методики.

Метрологія - наука, що вивчає загальноприйняті основи вимірювань, методи і засоби вимірювань, одиниці фізичних величин, методи точності вимірювань, принципи забезпечення єдності вимірювань і одноманітності засобів вимірювань. У метрології дуже детально (ретельно) розглядаються такі поняття як: еталони і зразкові засоби вимірювань, застосування зразкових засобів вимірювань до засобів вимірювань,які використовують у виробництві.

Головним завданням і метою метрології є вивчення всіх аспектів вимірювань фізичних величин. А також міжнародне сприяння в галузі метрології і законодавчі елементи.

Натуральні числа – числа, які отримують при природному рахунку; нескінченність натуральних чисел позначається N. Т.ч. $N = \{1,2,3...\}$ (іноді до нескінченності натуральних чисел також відносять нуль, тобто $N = \{0,1,2,3...\}$. Натуральні числа щодо складання і множення завжди дають натуральне число (але не віднімання або ділення). Натуральні числа комутативні і асоціативні щодо складання і множення, а множення натуральних чисел дистрибутивне відносно складання.

Натурфілософія – спроба тлумачити і пояснити природу явищ, грунтуючись на результатах, отриманих науковими методами, з метою знайти відповіді на деякі філософські питання. Займається найважливішими природничонауковими поняттями (субстанція, матерія, сила, простір, час та ін.), пізнанням зв'язків і закономірностей явищ природи.

Нев'язка (відхил) – різниця між значенням функції, обчисленим за результатами вимірювань, і дійсним її значенням, яке виникає внаслідок неминучих похибок вимірювань.

Є декілька різновидів нев'язок. Існує фактична і припустима (знайдена за формулою) нев'язка, за порівнянням із якими визначається якість виконаних робіт. Характеризує якість роботи відносна і абсолютна нев'язка. Нев'язка, що характеризує похибку певного виду вимірювань: кутова, лінійна, висотна нев'язка.

Непряме вимірювання — визначення шуканого значення фізичної величини на підставі результатів прямих вимірювань інших фізичних величин, функціонально пов'язаних з шуканою величиною.

Нерівноточниі вимірювання - ряд вимірювань фізичної величини, виконаних різними за точністю засобами вимірювань і/або в різних умовах. Зазвичай нерівноточні вимірювання обробляють з метою отримання результату вимірювань, коли неможливо отримати ряд рівноточних вимірювань.

Носієм результатів геодезичних вимірювань є "основа" – папір, плівка, магнітна стрічка, карта пам'яті і тому подібне, на якому записані результати геодезичних вимірювань з метою їх зберігання, передачі і (або) подальшої обробки.

Об'єктами геодезичних вимірювань є предмети матеріального світу (місцевості, споруди будівельного майданчика, виробничого приміщення і так далі), які характеризуються однією або декількома геодезичними величинами, що підлягають вимірюванням.

Парадигма - у філософії, соціології – початкова концептуальна схема, модель постановки проблем і їх розв’язання, методів дослідження, пануючих протягом певного історичного періоду в науковому суспільстві.

Похибка вимірювання — оцінка відхилення величини вимірюваного значення величини від її дійсного значення. Похибка вимірювання є характеристикою (мірою) точності вимірювання.

Прецизійність - ступінь близости один до одного незалежних результатів вимірювань, отриманих у конкретних регламентованих умовах. Вона залежить тільки від випадкових похибок і не має відношення до дійсного або встановленого значення вимірюваної. Міру прецизійності зазвичай виражають в термінах неточності і обчислюють як стандартне відхилення результатів вимірювань. Менша прецизійність відповідає більшому стандартному відхиленню.

Принцип вимірювань — фізичне явище або ефект, покладене в основу вимірювань.

Прогресуюча (дрейфова) похибка — непередбачувана похибка, змінна в часі. Вона є нестаціонарним випадковим процесом.

Похідна - основне поняття диференційного числення, що характеризує швидкість зміни функції. Визначається як границя відношення приросту функції до приросту її аргументу при наближенні приросту аргументу до нуля, якщо така границя існує. Процес обчислення похідної називається диференціюванням.

Пряме вимірювання — вимірювання, при якому шукане значення фізичної величини отримують безпосередньо.

Равноточниє вимірювання - ряд вимірювань фізичної величини, виконаних однаковими за точністю засобами вимірювань в одних і тих же умовах.

Раціональні числа — числа, представлені у вигляді дробу m/n (n=0), де m і n — цілі числа. Для раціональних чисел визначені всі чотири «класичні» арифметичні дії: складання, віднімання, множення і ділення (окрім ділення на нуль). Для позначення раціональних чисел використовується знак Q.

Систематична похибка — похибка, що змінюється в часі за певним законом (окремим випадком є постійна похибка, що не змінюється з часом). Систематичні похибка можуть бути пов'язані з помилками приладів (неправильна шкала, калібрування і тому подібне), неврахованими експериментатором.

Середньоквадратичне відхилення або **стандартне відхилення** в теорії ймовірностей і статистиці найбільш поширений показник розсіювання значень випадкової величини відносно її математичного очікування.

Суб'єктивні (операторні) особисті похибки - похибки, збумовлені ступенем уважності, зосередженості, підготовленості і іншими якостями оператора.

Теодолітний хід - це замкнена або розімкнена ламана лінія, точки зламу якої відповідним чином закріплені на місцевості і між ними зміряні відстані і ліві (або праві) кути повороту.

Теорема — твердження, для якого в певній теорії існує доказ (інакше кажучи висновки). Окремим випадком теорем є аксіоми, які приймаються істинними без усяких доказів або обгрунтувань.

Точність засобу вимірювань — характеристика якості засобу вимірювань, що відображає близькість його похибки до нуля.

Тріангуляція - один з методів створення мережі опорних геодезичних пунктів і сама мережа, створена цим методом; полягає в побудові рядів або мереж трикутників, що примикають один до одного, і у визначенні положення їх вершин у вибраній системі координат. У кожному трикутнику вимірюють усі

три кути, а одну з його сторін визначають з обчислень шляхом послідовного розв'язання попередніх трикутників, починаючи від того з них, у якому одна з його сторін отримана з вимірювань. Якщо сторона трикутника отримана з безпосередніх вимірювань, то вона називається базисною стороною. У минулому замість базисної сторони безпосередньо вимірювали коротку лінію, так званий базис, і від неї шляхом тригонометричних обчислень через особливу мережу трикутників переходили до сторони трикутника. Цю сторону зазвичай називають вихідною стороною, а мережу трикутників, через які вона обчислена, - базисною мережею. В рядах або мережах для контролю і підвищення їх точності вимірюють більшу кількість базисів або базисних сторін, ніж це мінімально необхідно.

Фізична величина – одна з властивостей фізичного об'єкту, загальна в якісному відношенні для багатьох фізичних об'єктів, але в кількісному відношенні індивідуальна для кожного з них.

Функція - це «закон», за яким кожний елемент x з деякої множини *X* ставиться у відповідність до єдиного елемента *y* з безлічі Y.

Хід нівелірний – геодезічний хід, що прокладається способом геометричного нівілірування за допомогою нівеліра. Служить для визначення висот нівілірних знаків (реперів). Нівелірний хід створюється шляхом вимірювання перевищень між точками.

Цілі числа – числа, що отримуються об'єднанням натуральних чисел з множиною негативних чисел і нулем, позначаються $Z = \{\ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$. Цілі числа замкнуті щодо складання, віднімання і множення (але не ділення).

Частинна похідна — одне з узагальнених понять похідної на випадок функції декількох змінних.

Чутливість приладу (або чутливість засобу вимірювання) – це реакція на підведення до нього вимірюваної величини. Чутливість може обчислюватися як абсолютна, так і відносна, характеризуючи чутливість у певній відмітці.

Шкала – частина конструкції відлікового пристрою, що складається з відміток і чисел, відповідних до послідовних значень вимірюваної величини. Відмітки можуть бути у вигляді рисок, крапок, зубців та ін. Покажчики можуть бути у вигляді каплевидних, ножевидних і світлових стрілок.

ДОДАТОК Б

Розподіли випадкових величин

Нормальний розподіл випадкової величини і його характеристика

Випадкова величина ξ має **рівномірний розподіл** на відрізку $[a, b], (a < b)$, якщо $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a,b], \\ 0, & x \notin [a,b]. \end{cases}$

Характеристична функція: $\varphi(t) = \left(e^{itb} - e^{ita}\right)/(b-a)it$.

Моменти: $E\xi^k = \dfrac{b^{k+1} - a^{k+1}}{(b-a)(k+1)}$.

Дисперсія: $D\xi = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Коефіцієнт асиметрії: $\gamma_1 = 0$.

Коефіцієнт ексцесу: $\gamma_2 = 9/5$.

Трикутний розподіл (розподіл Сімпсона)

Випадкова величина ξ має **трикутний розподіл** (розподіл Сімпсона) на відрізку $[a,b], (a < b)$ якщо

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{b-a} - \dfrac{2}{(b-a)^2}|a+b-2x|, & x \in [a,b], \\ 0, & x \notin [a,b]. \end{cases}$$

Характеристична функція: $\varphi(t) = \left(e^{itb} - e^{ita}\right)/(b-a)it$.

Моменти: $E\xi^k = \dfrac{4}{(b-a)^2(k+1)(k+2)}\left[a^{k+2} + b^{k+2} - 2\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^{k+2}\right]$.

Дисперсія: $E\xi^k = \dfrac{4}{(b-a)^2(k+1)(k+2)}\left[a^{k+2} + b^{k+2} - 2\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^{k+2}\right]$.

Коефіцієнт асиметрії: . $\gamma_1 = 0$

Коефіцієнт ексцесу: $\gamma_2 = -3/5$.

ДОДАТОК В

Похідні функцій

Похідні простих функцій:

$$\frac{d}{dx}c=0;\quad \frac{d}{dx}x=1;\quad \frac{d}{dx}cx=c;\quad \frac{d}{dx}|x|=\frac{x}{|x|}=\operatorname{sgn} x,\quad x\neq 0;$$

$$\frac{d}{dx}x^c=cx^{c-1},\ \text{коли}\ \ i\ \ \text{визначені;}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{d}{dx}\left(x^{-1}\right)=-x^{-2}=-\frac{1}{x^2};\qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^c}\right)=\frac{d}{dx}\left(x^{-c}\right)=-\frac{c}{x^{c+1}};$$

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x}=\frac{d}{dx}x^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}},\quad x>0;$$

$$\frac{d}{dx}\sqrt[n]{x}=\frac{d}{dx}x^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}x^{-\frac{n-1}{n}}=\frac{1}{n\cdot\sqrt[n]{x^{n-1}}},\quad x>0.$$

Похідні експоненціальних і логарифмічних функцій:

$$\frac{d}{dx}c^x=c^x\ln c,\quad c>0;\qquad \frac{d}{dx}e^x=e^x;\qquad \frac{d}{dx}e^{f(x)}=f'(x)e^{f(x)};$$

$$\frac{d}{dx}\log_c|x|=\frac{1}{x\ln c},\ c>0,\quad c\neq 1;\quad \frac{d}{dx}\ln x=\frac{1}{x};\quad \frac{d}{dx}x^x=x^x(1+\ln x).$$

Похідні тригонометричних функцій:

$$\frac{d}{dx}\sin x=\cos x;\quad \frac{d}{dx}\cos x=-\sin x;\quad \frac{d}{dx}\operatorname{tg} x=\sec^2 x=\frac{1}{\cos^2 x};$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{ctg} x=-\operatorname{cosec}^2 x=\frac{-1}{\sin^2 x};\quad \frac{d}{dx}\sec x=\operatorname{tg} x\sec x;$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{cosec} x=-\operatorname{ctg} x\operatorname{cosec} x;\quad \frac{d}{dx}\arcsin x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};\quad \frac{d}{dx}\arccos x=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arctg} x=\frac{1}{1+x^2};\quad \frac{d}{dx}\operatorname{arcsec} x=\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}};\quad \frac{d}{dx}\operatorname{arcctg} x=\frac{-1}{1+x^2};$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arccosec} x=\frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}.$$

Навчальне видання

МЕТЕШКІН Костянтин Олександрович

Конспект лекцій з курсу **«Математична обробка геодезичних вимирів»** Модуль 1. Застосування основ теорії похибок у обробці геодезичних даних (Для науково-педагогічних працівників, що реалізують технологічний підхід в навчанні і студентів 2-го курсу денної і заочної форм навчання напряму підготовки 6.080101 – «Геодезія, картографія та землеустрій». Експериментальна версія для технології навчання).

Редактор *М. З. Аляб'єв*

Комп'ютерне верстання *І. В. Волосожарова*

План 2010, поз. 11 Н

Підп. до друку 25.05.10 Формат 60х84 1/16
Друк на ризографі. Ум. друк. арк. 4,7
Зам.№ Тираж 50 пр.

Видавець і виготовлювач:
Харківська національна академія міського господарства,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@ksame.kharkov.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи: ДК №731
від 19.12.2001